下册目录

第 8 章　关于 $n \geq 5$ 博弈的一些说明　505

39. 各类博弈的参数个数　505

39.1　$n=3,4$ 的情况　505

39.2　$n \geq 3$ 的情况　506

40. 对称五人博弈　508

40.1　对称五人博弈的形式体系　508

40.2　两种极端情况　509

40.3　对称五人博弈与 1、2、3 对称四人博弈之间的关系　512

第 9 章　博弈的合成与分解　519

41. 合成与分解　519

41.1　全部解能够被决定的 n 人博弈　519

41.2　第一个类:合成和分解　520

VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

41.3 严格定义 523

41.4 可分解性分析 526

41.5 修改的必要性 529

42. 理论的修改 530

42.1 零和条件的不完全放弃 530

42.2 策略等价:常数和博弈 530

42.3 新理论中的特征函数 534

42.4 新理论中的分配、占优和解 536

42.5 新理论中的本质性、非本质性和可分解性 538

43. 分解分拆 541

43.1 裂集和成分博弈 541

43.2 全部裂集的系的性质 542

43.3 全部裂集的系的特征与分解分拆 544

43.4 分解分拆的性质 547

44. 可分解博弈:理论的进一步推广 550

44.1 一个可分解的博弈的解及其成分的解 550

44.2 分配和分配集的合成与分解 551

44.3 解的合成与分解:主要结果 554

44.4 理论的推广:外部来源 557

44.5 剩余 559

44.6 对剩余的限制:新结构中一个博弈的非孤立特征 562

44.7 新结构 $E(e_0)$ 和 $F(e_0)$ 的讨论 563

45. 对剩余的限制和扩展的理论结构 566

45.1 剩余的下限 566

45.2 剩余的上限：独立分配和完全独立分配 567
45.3 关于两个界限的讨论：它们的比率 571
45.4 独立分配与各种解 575
45.5 定理证明 577
45.6 总结 583
46. 一个可分解的博弈全部解的决定 586
46.1 分解的基本性质 586
46.2 分解及其与解的关系：有关 $F(e_0)$ 的初步结果 589
46.3 连续性 592
46.4 连续性 596
46.5 $F(e_0)$ 中的全部结果 599
46.6 $E(e_0)$ 中的完全结果 602
46.7 部分结果的图示 605
46.8 解释：正常区域和各种性质的遗传性 607
46.9 哑玩家 610
46.10 博弈的嵌入 611
46.11 正常区域的意义 615
46.12 转移现象的首次出现：$n=6$ 618
47. 新理论中的本质三人博弈 619
47.1 讨论的必要性 619
47.2 预备性分析 619
47.3 六种情况讨论：情况（Ⅰ）—（Ⅲ） 624
47.4 情况（Ⅳ）：第一部分 625
47.5 情况（Ⅳ）：第二部分 629

47.6 情况(Ⅴ) 635

47.7 情况(Ⅵ) 638

47.8 结果的解释:解中的曲线(一维部分) 640

47.9 连续性:解中的区域(二维组成部分) 642

第10章 简单博弈 644

48. 胜利联盟、失败联盟及其出现的博弈 644

48.1 41.1中的第二个类:联盟的决策 644

48.2 胜利联盟与失败联盟 646

49. 简单博弈的特征描述 649

49.1 胜利联盟与失败联盟的一般概念 649

49.2 一元集的特殊作用 653

49.3 实际博弈的 W、L 的特征描述 655

49.4 简单博弈的严格定义 658

49.5 简单博弈的一些基本性质 658

49.6 简单博弈及其 W、L:最小胜利联盟 W^m 659

49.7 简单博弈的解 661

50. 多数博弈和主解 663

50.1 简单博弈的例子:多数博弈 663

50.2 齐次性 667

50.3 分配的概念在求解中的更直接运用 669

50.4 直接方法 670

50.5 与一般理论的联系:严格阐述 673

50.6 结果的重新描述 677

50.7 结果解释 680

50.8 与齐次多数博弈的联系 682

51. 全部简单博弈的枚举方法 684

51.1 概论 684

51.2 饱和法：借助 W 来枚举 686

51.3 从 W 到 W^* 的理由：使用 W^* 的困难 689

51.4 改变后的方法：借助 W^* 的枚举 693

51.5 简单博弈与分解 697

51.6 非本质博弈、简单博弈和博弈的分解：剩余的处理 700

51.7 W^* 意义上的可分解性准则 701

52. n 较小时的简单博弈 705

52.1 $n=1,2,3$ 的情况 705

52.2 $n\geq 4$ 时的二元集及其在 W^* 分类中的作用 706

52.3 情况 C^*、C_{n-2} 和 C_{n-1} 的可分解性 708

52.4 (有哑玩家的)不同于 $[1,\cdots,1,l-2]_h$ 的简单博弈：C_k, $k=0,1,\cdots,n-3$ 712

52.5 $n=4,5$ 713

53. $n\geq 6$ 的简单博弈及其新情况 715

53.1 $n<6$ 时的有规律性 715

53.2 六个主要反例($n=6,7$) 717

54. 适宜博弈中全部解的确定 728

54.1 简单博弈不同于主解的解 728

54.2 全部解已知的博弈的枚举 729

54.3 分析简单博弈 $[1,\cdots,1,n-2]_h$ 的理由 731

55. 简单博弈 $[1,\cdots,1,n-2]_h$ 732

55.1 准备性说明 732
55.2 占优和首要玩家：情况（Ⅰ）和（Ⅱ） 733
55.3 情况（Ⅰ）的解决 735
55.4 情况（Ⅱ）：$\underline{V}$ 的确定 739
55.5 情况（Ⅱ）：$\overline{V}$ 的确定 743
55.6 情况（Ⅱ）：$\mathscr{B}$ 和 S。 747
55.7 情况（Ⅱ′）和（Ⅱ″）：（Ⅱ′）的解决 749
55.8 情况（Ⅱ″）：$\mathscr{B}$ 和 V′占优 752
55.9 情况（Ⅱ″）：V′的确定 754
55.10 情况（Ⅱ′）的解决 762
55.11 完全结果的重新阐述 766
55.12 结果的解释 769
第11章 一般非零和博弈 777
56. 理论的扩展 777
56.1 问题描述 777
56.2 虚构玩家：零和扩展 $\overline{\Gamma}$ 779
56.3 有关 $\overline{\Gamma}$ 的特征的一些问题 781
56.4 $\overline{\Gamma}$ 的运用所受到的限制 784
56.5 两种可能的过程 788
56.6 有歧视的解 789
56.7 其他情况 791
56.8 新结构 793
56.9 Γ 是零和博弈情况的重新分析 796
56.10 占优概念分析 801
56.11 严格讨论 807

56.12 解的新定义 811
57. 特征函数及相关问题 813
57.1 特征函数:扩展型和受约束型 813
57.2 基本性质 814
57.3 全部特征函数的确定 817
57.4 可去除玩家集 821
57.5 策略等价:零和博弈与常数和博弈 825
58. 特征函数的解释 830
58.1 定义分析 830
58.2 获益欲与损人欲 831
58.3 讨论 833
59. 一般分析 836
59.1 方案讨论 836
59.2 简化型和不等式 837
59.3 各种各样的题目 841
60. $n \leqq 3$ 一般博弈的解 845
60.1 $n=1$ 的情况 845
60.2 $n=2$ 的情况 846
60.3 $n=3$ 的情况 848
60.4 与零和博弈的比较 854
61. $n=1,2$ 时结果的经济学解释 855
61.1 $n=1$ 的情况 855
61.2 $n=2$ 的情况:二人市场 855
61.3 二人市场及其特征函数的讨论 858
61.4 第58节中观点的正当理由 861

61.5 可分割的物品:“边际对” 862

61.6 价格 866

62. $n=3$ 时结果的经济学解释:特殊情况 869

62.1 $n=3$ 时的特殊情况:三人市场 869

62.2 预备性讨论 871

62.3 解:第一种子情况 872

62.4 解:一般形式 876

62.5 结果的代数形式 877

62.6 讨论 879

63. $n=3$ 时结果的经济学解释:一般情况 882

63.1 可分物品 882

63.2 有关不等式的分析 885

63.3 准备性讨论 888

63.4 解 889

63.5 结果的代数形式 892

63.6 讨论 894

64. 一般市场 897

64.1 问题描述 897

64.2 一些特殊性质:垄断和买方垄断 899

第12章 占优与解的概念扩展 903

65. 扩展:特殊情况 903

65.1 问题描述 903

65.2 一般说明 905

65.3 排序、可递性和非周期性 906

65.4 对称关系和完备排序的解 910

65.5 半排序的解 912
65.6 非周期性和严格非周期性 915
65.7 对于一个非周期关系来说的解 921
65.8 解的惟一性、非周期性和严格非周期性 925
65.9 应用于博弈:离散性和连续性 929
66. 效用概念的推广 931
66.1 推广:理论描述的两个阶段 931
66.2 第一个阶段的讨论 932
66.3 第二个阶段的讨论 934
66.4 统一两个阶段的可取之处 937
67. 一个例子 938
67.1 描述 938
67.2 解及其解释 942
67.3 推广:不同离散效用刻度 946
67.4 有关讨价还价的结论 949
附录:效用的公理化描述 951
A.1 问题描述 951
A.2 基于公理的推导 953
A.3 总结说明 969
人名索引 976
词条索引 979
译者后记 1017

第 8 章　关于 $n \geqq 5$ 博弈的一些说明

39. 各类博弈的参数个数

39.1　$n=3,4$ 的情况

39.1　我们知道，本质博弈形成我们的真正问题，而且我们假设它们总是有简化型且 $\gamma=1$。在这一表述中，恰恰存在一个三人零和博弈，而四人零和博弈形成一个三维流形。[①] 我们还看到，(惟一的)三人零和博弈自然而然是对称的，而所有四人零和博弈的三维流形却恰好包含一个对称博弈。 330

我们也可以这样说，上述各种博弈中的每一个的维度是多少，即为了描述一类博弈中的一个，必须确定的未知

① 关于一般说明，见 27.1.4 和 27.3.2；关于三人零和博弈，见 29.1.2；关于四人零和博弈，见 34.2.1。——330，①

参数有几个。图 65 给出了有关结果。[①] 我们上面的说法重新出现在该表 n = 3,4 栏中。

玩家个数	所有的博弈	对称博弈
3	0*	0*
4	3	0*
5	10	1
6	25	1
7	56	2
8	119	2
...	...	...
n	$2^{n-1}-n-1$	$\frac{n+1}{2}-2n$ 是奇数 $\frac{n}{2}-2n$ 是偶数

* 表示该博弈惟一

图 65——本质博弈。(简化形式,其中 $\gamma = 1$)

39.2 $n \geqq 3$ 的情况

39.2.1 接下来,我们确定全部 n 人博弈和对称 n 人零和博弈的参数个数。

特征函数是很多 v(S)的一个综合,而 v(S)的个数就是 $I = (1, \cdots, n)$ 的子集的个数,即 2^n 个。这些数满足 25.3.1的约束条件(25:3:a)—(25:3:c),以及 27.2 中的(27:5)所表达的归于简化特征和正规化 $\gamma = 1$ 的条件。在这些条件中,(25:3:b)使得,每当 v(S)被给定,那么,

① 对于 $n = 1,2$,不存在本质博弈!——330,②

v(−S)就确定了，因此它使参数减少一半。[①] 这样，我们有 2^{n-1}，而不是 2^n。接着，(25:3:a)确定其余 v(S)中的一个：v(⊖)；(27:5)确定其余 v(S)中的 n 个：v[(1)]，…，v[(n)]。因此，它们使参数个数减少 $n+1$ 个。[②] 这样，我们有 $2^{n-1}-n-1$ 个参数。最后，(25:3:c)不需要考虑，因为它仅仅包含不等式。

39.2.2 如果该博弈是对称的，那么，v(S)仅仅依赖于 S 的元素 p 的个数：$v(S)=v_p$，见 28.2.1。因此它是多个 v_p 的综合，而 $p=0,1,\cdots,n$，即 $n+1$ 个。这些数服从 331
28.2.1的约束条件(28:11:a)—(28:11:c)；这一简化特征是自动有的，而且我们还要求 $v_1=-\gamma=-1$。当 v_p 给定时，(28:11:b)固定 v_{n-p}，所以，对于 $n-p\neq p$，它使这些参数的个数减半。当 $n-p=p$[③]，即 $n=2p$ 时，n 必定是一个偶数，那么，$p=n/2$，(28:11:b)表明，这个 v_p 必定等于零。这样，当 n 是奇数时，我们有$\frac{n+1}{2}$个参数；当 n 是偶数时，我们有$\frac{n}{2}$个参数，而不是最初的 $n+1$ 个。接下来，(28:11:a)确定其余 v_p 中的一个：v_0；$v_1=-\gamma=-1$ 确定了其余 v_p 中的另一个：v_1；它们使参数减少两个：[④]这样，我们有$\frac{n+1}{2}-2$

---

① S 和 −S 永远不会是相同的集合！——330，③

② $S=⊖,(1),\cdots,(n)$互不相同且各自的分量都不相同。——330，④

③ 与第 330 页脚注③比较！——331，①

④ $p=0,1$ 相互不同且不同于各自的 $n-p$。(后者只是因为 $n\geq3$。)——332，②

或$\frac{n}{2}-2$个参数。最后,(28:11:c)不需要考虑,因为它只包含不等式。

39.2.3 我们用图 65 概括这些信息。在图 65 中,我们明确给出 $n=3,4,5,6,7,8$ 时的值——其中,前面两个的值是我们过去提到过的。

如果需要的话,图 65 左边一栏的迅速增加可以作为
一个指数,表明随着参与者人数增加,博弈的复杂性如何
332 增加。值得注意的是,右边一列也在增加,但增加得慢
得多。

40. 对称五人博弈

40.1 对称五人博弈的形式体系

40.1.1 我们并不试图直接攻克五人零和博弈。系统化的理论还没有发达到允许我们这么做的程度,而且对于描述性的方法和决疑法(如四人零和博弈分析使用的那样)来说,10 个参数实在令人望而生畏。

然而,研究对称的五人零和博弈还是可能的。其参数个数是 1,小而不等于零,而且是一个值得考虑的质的变化。对于 $n=3,4$,仅仅存在一个对称博弈,$n=5$ 时,第一次出现了这样的情况,即对称博弈的结构呈现出多种类型。

40.1.2 对称五人博弈由 28.2.1 的 v_p, $p=0,1,2,3,4$,

5 刻画，服从那里给出的约束条件(28:11:a)—(28:11:c)。(28:11:a)和(28:11:b)是说(在 $\gamma = 1$ 时)

(40:1) $\quad v_0 = 0, v_1 = -1, v_4 = 1, v_5 = 0,$

且 $v = -v_3$，即

(40:2) $\quad v_2 = -\eta, \quad v_3 = -\eta$。

(28:11:c)是说，对于 $p + q \leqq 5$，$v_{p+q} \geqq v_p + v_q$，而且我们能够使 p、q 进一步服从(28:12)的约束条件。所以，$p = 1$，$q = 1, 2$①，而且根据(40:1)和(40:2)，我们有

$$p = 1, q = 1: \quad -2 \leqq -\eta;$$
$$p = 1, q = 2: \quad -1 - \eta \leqq \eta;$$

即

(40:3) $$-\frac{1}{2} \leqq \eta \leqq 2。$$

总之：

(40:A) 对称五人零和博弈由参数 η 借助(40:1)和(40:2)描述。η 的变动范围是(40:3)。

40.2 两种极端情况

40.2.1 为上述对称博弈提供一个直接的描述也许是有益的。让我们首先考虑区间(40:3)的两个端点：

$$\eta = 2, -\frac{1}{2}。$$

首先考虑 $\eta = 2$ 的情况：在这种情况下，对于每个二元 333

① 这可以轻易地从(28:12)或第 259 页脚注②中的不等式得到验证。这些结果给出 $1 \leqq p \leqq \frac{5}{3}$，$1 \leqq q \leqq 2$，又因 p、q 是整数，所以 $p = 1, q = 1, 2$。——332，①

集来说，v(S) = -2，即每个二人联盟都是失败的。① 因此，一个三人联盟（作为前者的补集）是一个胜利联盟。这就告诉了我们所有事情：在联盟的逐步形成中，从失败到胜利的转折点是当联盟的规模从2过渡到3的时候，而且在这一点发生转变的比率是100%。②

总之：

(40:B) $\eta=2$ 描述的这样一个博弈，其中所有玩家的惟一目标是形成三人联盟。

40.2.2 接着，我们考虑 $\eta=-\frac{1}{2}$。在这种情况下，我们认为

$$\text{当 } S \text{ 有}\begin{cases}4\\2\end{cases}\text{个元素时，}\quad \mathrm{v}(S)=\begin{cases}1\\ \frac{1}{2}\end{cases}。$$

一个四人联盟总是一个胜利联盟。③

上述公式表明，从比例上说，一个二人联盟做得像一个四人联盟一样好。因此，我们有理由认为前者取得了与后者一样大的胜利。如果我们采取这一较宽泛的胜利观，我们就可以再次断言，有关这一博弈的所有事情都说清楚

① 见35.1.1中的讨论，尤其见第296页脚注④。——333，①

② 一位玩家像两位玩家一样失败，四位玩家也不会比三位玩家有更大的胜利。当然，一个三人联盟没有吸收第四个同伙的动机。有启发意义的是，如果他们这样做了，他们大概也会在对其最不利的条件下接受他。但不管怎样，作为一个整体来看，这个四人联盟是一个胜利联盟，因为剩下的孤立玩家是失败的。——333，②

③ 在任何 n 人零和博弈中，任意一个 $n-1$ 人联盟都是胜利的，因为一个孤立的玩家总是一个失败者。见上面引用过的地方。——333，③

了：在联盟的形成中，从失败到胜利的转折点发生在联盟的规模从一增加到二的时候；而且在这一点处，转变的比例是 100%。①

总之：

(40:C)　　$\eta=-\frac{1}{2}$描述了一个博弈，其中所有玩家的惟一目标是形成二人联盟。

40.2.3　基于(40:B)和(40:C)，我们不难猜测两个博弈各自的试探性的解。严格证明这一点并不困难，我们不做进一步分析。

在我们转而考虑(40:3)中 η 的其他取值之前，我们要说明的一点是，(40:B)和(40:C)显然是界定博弈的一般方法的一个最简单例子。这一方法(较第 296 页脚注④ 334
中提到的第 10 章中的方法更为一般)将在(关于非对称博弈的)其他地方得到详尽分析。它服从一个算术性质。因此，显然不可能存在这样一个(本质对称零和)博弈，其中，如果 p 是 n 的一个因子，每个 p 人联盟都是胜利联盟，因为那样的话，就会有 n/p 个这样的联盟，而且每个联盟都是胜利者，没有了失败者。另一方面，$p=n-1$ 时，同样条件丝毫不约束该博弈(见第 333 页脚注③)。

---

① 一位玩家是失败的，二或四位玩家是胜利的。一个三人联盟是值得注意的复合情况：对于一个三元集 S 来说，$v(S)$ 是 $-\frac{1}{2}$，即它是在一个二元集的 $\frac{1}{2}$ 上添加一个 -1 得到的。因此，一个三人联盟会胜过(它所包含的)一个胜利的二人联盟加上剩下的孤立且失败的玩家。这个联盟只是一个胜利组与一个失败组的组合，其状况丝毫不因这一动作而被改变。——333，④

40.3 对称五人博弈与1、2、3对称四人博弈之间的关系

40.3.1 现在,让我们考虑(40:3)内部的 η。这种情况有点类似于35.3末尾讨论过的情况。对于(40:3)的两个端点,我们有某种试探性的看法(见上)。(40:3)的每一点 η 都是被这些端点"环绕"着的。更确切地说,使用适当的权重,它是它们的重心。① 前面给出的说明再次适用:虽然这一结构表示,(40:3)的所有博弈是极端情况(40:B)和(40:C)的组合,我们却没有理由指望前者的策略能够通过某种直接的过程得自后者的策略。我们关于四人零和博弈的经验就是证明。

然而,与四人博弈的另一个相似之处提供了某种富有启发性的思路。关于玩家1、2、3对称四人零和博弈的参数个数是相同的。现在,我们有参数 η,η 的取值范围是

(40:3) $$-\frac{1}{2}\leqq\eta\leqq 2,$$

而我们提到的博弈有参数 x_1,x_1 的变动范围是

(40:4) $$-1\leqq x_1\leqq 1。$$②

(完全对称的)五人博弈与1、2、3对称的四人博弈之间的这一相似性至今还完全是形式上的相似。然而,其背后有着深层意义。我们接下来的任务就是将其弄明白。

40.3.2 考虑一个对称五人博弈 Γ,其 η 的取值范围是(40:3)。现在,我们对该博弈进行适当修改,把玩家4和

---

① 根据40.1.2中我们的方程(40:1)、(40:2),读者能够轻易给出第304页脚注①意义的这个组合。

② 见35.3.2在 Q 的表示中,$x_1=x_2=x-3$。——334,②

玩家 5 结合成一位玩家，记为玩家 4′。记修改后的博弈为 Γ′。要认识到，Γ′是一个全新的博弈：我们既然没有断定在 Γ 中玩家 4 和玩家 5 必然联合行动，形成一个联盟等，也没有断言存在任何一般地成立的导致这一联盟的策略动机。① 我们强迫玩家 4 和玩家 5 结合起来。我们是通过修改博弈规则，即通过用博弈 Γ′取代 Γ 来做到这一点的。

现在，博弈 Γ 是一个对称五人博弈，而 Γ′是一个 1、2、 335
3 对称四人博弈。② 给定 Γ 的 η，我们需要确定的 Γ′的 x_1，以弄清楚这界定了什么东西与(40:3)和(40:4)对应着。然后，我们将研究 Γ 与 Γ′的策略——即解——之间是否存在某些联系。

Γ′的特征函数 v′(S)能够直接用 Γ 的特征函数 v(S)表达出来。事实上：

$$v'[(1)]=v[(1)]=-1,v'[(2)]=v[(2)]=-1,$$

$$v'[(3)]=v[(3)]=-1,v'[(4')]=v[(4,5)]=-\eta;$$

$$v'[(1,2)]=v[(1,2)]=-\eta,v'[(1,3)]=v[(1,3)]=-\eta,$$

$$v'[(2,3)]=v[(2,3)]=-\eta,v'[(1,4')]=v[(1,4,5)]=\eta,$$

$$v'[(2,4')]=v[(2,4,5)]=\eta,v'[(3,4')]=v[(3,4,5)]=\eta;$$

$$v'[(1,2,3)]=v[(1,2,3)]=\eta,$$

$$v'[(1,2,4')]=v[(1,2,4,5)]=1,$$

$$v'[(1,3,4')]=v[(1,3,4,5)]=1,$$

---

① 这里的讨论应该与 36.1.2 中的讨论进行比较，那里，一个类似的二人组合在如下条件下形成，即这一联合似乎有着策略上的合理性。——334，③

② Γ 中的参与者是玩家 1、2、3、4、5，他们在最初的博弈中有着相同的角色。Γ′中的参与者是玩家 1、2、3 和复合玩家(4,5)：4′。显然，1、2、3 仍然有相同角色，但 4′就不同了。——335，①

$$v'[(2,3,4')] = v[(2,3,4,5)] = 1;$$

而且

$$v'(\ominus) = v'[(1,2,3,4')] = 0。$$

虽然 Γ 是正规化的和简化的，Γ′却不是。而且，我们必须将其变成那种形式，因为我们要计算其 x_1、x_2、x_3、x_4，即要将其与 34.2.2 的 Q 联系起来。

因此，让我们首先应用 27.1.4 的正规化公式。那些公式表明，玩家 $k=1,2,3,4'$的份额必须改变为数额 α_k^0，

$$\alpha_k^0 = -v'[(k)] + \frac{1}{4}\{v'[(1)] + v'[(2)] + v'[(3)] + v'[(4')]\},$$

且

$$\gamma = -\frac{1}{4}\{v'[(1)] + v'[(2)] + v'[(3)] + v'[(4')]\}。$$

从而

$$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \alpha_3^0 = \frac{1-\eta}{4}, \alpha_4^0 = -\frac{3(1-\eta)}{4}, \gamma = \frac{3+\eta}{4}。$$

显然，根据(40:3)，$\gamma \geqq \frac{3-\frac{1}{2}}{4} = \frac{5}{8} > 0$，所以该博弈是一个本质博弈。每位玩家的份额除以 γ 就实现了正规化。

因此，对于一个二元集 $S=(i,j)$，$v'(S)$被替换为

$$v''(S) = \frac{v'(S) + \alpha_i^0 + \alpha_j^0}{\gamma}。$$

简单的计算给出如下结果：

$$v''[(1,2)] = v''[(1,3)] = v''[(2,3)] = -\frac{2(3\eta-1)}{3+\eta},$$

$$v''[(1,4')] = v''[(2,4')] = v''[(3,4')] = \frac{2(3\eta-1)}{3+\eta}。$$

如我们在 34.2 中表示 Q 时所使用的那样，这是该特征函数的正规型和简化型。34.2.1 中(34:2)与上面的表达式合起来给出， 336

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{3\eta - 1}{3 + \eta}。$$

把 x_1、x_2、x_3 看作给定，上式能够被重写为

(40:5)　　$$(3 - x_1)(3 + \eta) = 10。$$

不难验证，(40:5)把 η 值域(40:3)映射到 x_1 值域(40:4)。该映射显然是单调的。其详细内容见图 66 并结合 x_1 和 η 的取值对应表。图中曲线代表 x_1，η 平面中的关系(40:5)。这条曲线显然是一条双曲线(的一段弧)。

337

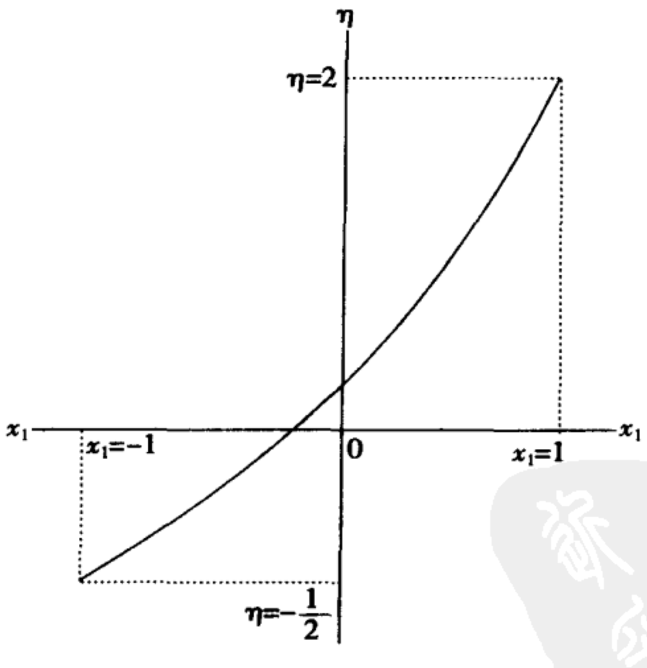

图 66

40.3.3 我们关于1、2、3对称四人博弈的分析以36.3.2中指出的结果为告终：Q中的对角线Ⅰ—中心—Ⅷ所代表的博弈从A到E分为五类，其中每一类由一个有特定性质的解刻画。对角线Ⅰ—中心—Ⅷ——即区间$-1 \leqq x_1 \leqq 1$的划分见图64。

因此，目前的结果暗示着对称五人博弈Γ的相应分类，希望通过将其与1、2、3对称四人博弈的逐类比较获得求解的思路。

使用图66，我们得到区间$-\frac{1}{2} \leqq \eta \leqq 2$的进一步划分：$\bar{A}-\bar{E}$，它们是$-1 \leqq x_1 \leqq 1$中$A-E$的象。详细细节见图67。

相应的x_1和η值

x_1:	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
η:	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{4}$	1	2

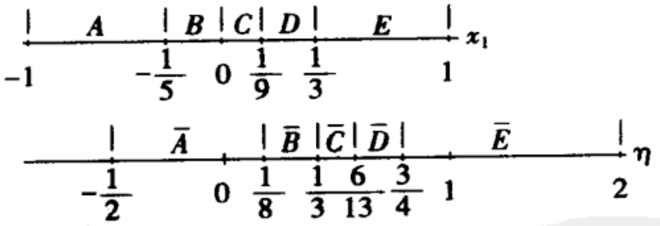

图 67

对称五人博弈的详细分析能够以此为基础进行。它揭示的是，区域$\bar{A}$和$\bar{B}$的确起着我们预期的作用，但区域$\bar{C}$、$\bar{D}$和$\bar{E}$则必须用其他区域，$\bar{C}'$和$\bar{D}'$取代。$-\frac{1}{2} \leqq \eta \leqq 2$

中的区域 $\bar{A}$—$\bar{D}'$ 以及它们在 $-1 \leq x_1 \leq 1$ 中的逆象 A—D'（同样根据图 66 得到）如图 68 所示。

值得说明的是，图 68 的 x_1 表现出较图 67 中的 x_1 更大的对称性，尽管对于 1、2、3 对称的四人博弈来说有意义的是后者。

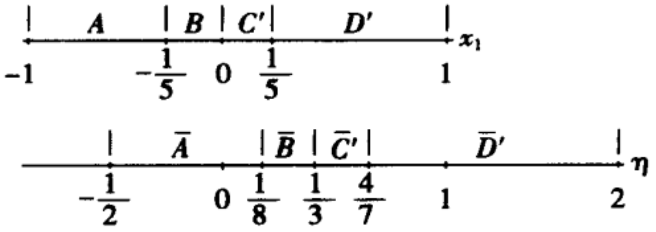

图 68

40.3.4　对称五人博弈的分析还具有某种超出上述直接信息的启发意义。事实上，通过比较对称五人博弈 Γ 和相应的 1、2、3 对称四人博弈 Γ′，并研究它们的解之间的不同，我们就能够看出复合玩家 4′中玩家 4 和玩家 5 合并的策略效应。如果这些解不表现出本质不同
（如上所述，在区域 $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 就是这样），那么，我们就可以 338
说，这一合并不影响真正有意义的策略分析。[①] 另一方面，当这样的不同出现时（这发生在其余区域之中），我

---

① 当然，你必定预料到，在 Γ 的解中，玩家 4 和玩家 5 处于两个相对立的联盟之中。显然，在 Γ′中没有与此类似的事情。我们用缺乏基本不同指，在 Γ 的一个解中表明 4 和 5 的一个联盟的那些分配应该对应着 Γ′的解中的等价分配。这些想法需要更详细讨论，这是可能的，但篇幅过长，不宜在这里给出。——338，①

们会面对一个有趣的情况，即当4和5甚至在Γ中恰好也合作时，他们的联合地位因他们分离的可能性而被扰乱了。①

篇幅不允许我们基于严格的解的概念进行较为充分的讨论。

① 在22.2中，我们关于三人博弈的首次讨论表明，在一个联盟之内，成果的分配是由分离情况下每位玩家的可能性决定的。但是，我们现在想像的这种情况则不同。在我们现在的Γ中，能够发生的事情是，玩家4加上玩家5的总份额会受到这一"想像"的事实的影响。

这样一种可能性的一个定性概念最好以如下方式获得：当4和5的初步联盟正在与其潜在未来盟友进行谈判时，他们的讨价还价地位在如下两种情况有所不同：一、在Γ'中，他们的联盟已知不可能被拆散；二、在Γ中，他们有可能对立。——338，②

第 9 章　博弈的合成与分解

41. 合成与分解

41.1　全部解能够被决定的 n 人博弈

41.1.1　前面两章告诉我们，随着参与者人数 n 增加 339
到 4，5 等，我们的问题的复杂程度迅速增加。尽管这些分析仍不全面，却十分浩繁，以至于要将决疑法应用于五位参与者以上的情况几乎是没有希望的。① 另外，以这种方式获得的结果显得支离破碎，这使其不能充分告诉我们这一理论的一般可能性。

另一方面，绝对重要的是，我们一定要认识到，哪些条件对于更大的 n 来说总是成立的。不仅对于经济和社会应用来说这是最为重要的，另外一个理由是：随着 n 的增加，会出现新的现象。$n=2,3,4$（见 20.1.1、20.2、35.1.3

---

①　正如我们在第 8 章中看到的那样，对于五位参与者的情况，我们不得不将自己限于对称博弈。——339，①

和第221页脚注②)中的每一种情况都是这样的。从 $n=4$ 到 $n=5$,我们还没有观察到这一现象,也许是因为我们缺乏有关这种情况的详细信息。但是,我们将在后面看到(见46.12),一个重要的现象首次出现于 $n=6$ 的情况。

41.1.2 出于这些理由,我们迫切需要找到某种技术来对付 n 较大的博弈。目前情况下,我们不能奢望找到一个系统的和详尽的方法。所以,一个自然的方法是找出一些包括很多参与者的、能够求解的特殊类型的博弈。[①] 一般经验是,在精确和自然科学的很多领域中,彻底弄清楚一些特例——它们在技术上是可以对付的且包含着基本原理——很有可能成为系统的和详尽的理论的奠基工作。

我们将阐述和讨论两类这样的特例。我们可以把它们看作两个四人博弈的扩展——这样,其中每一个都将是这两个类之一的一个原型。这两个四人博弈对应着34.
340 2.2中引入的立方体 Q 的八个角:事实上,我们看到,这些角仅仅代表着两类策略不同的博弈——一类是35.1中讨论的I、V、VI、VII;另一类是35.2中讨论的II、III、IV、VIII。因此,Q 的角I和VIII是这些推广的原型,是本章和下一章要研究的对象。

41.2 第一个类:合成和分解

41.2.1 我们首先考虑35.2中讨论过的 Q 的角VIII。正如我们在35.2.2中做的那样,该博弈具有如下显著特点:四位参与者分为两个分离的集合(一个集合中有

① 以这种方式,每一个都发挥着基本作用!——339,②

三个元素，另一个集合中有一个元素）。也就是说，我们可以认为，每一个集合中的玩家各自独立地在其内部进行一个博弈，两个集合之间没有任何关系。

这个博弈的一个自然推广是有 $n=k+l$ 个参与者的博弈 Γ，它有如下性质：参与者落人分别有 k 个和 l 个元素的两个集合，这两个集合的元素相互之间没有联系。也就是说，每个集合中的玩家可以被视为分别玩一个独立的博弈，如 Δ 和 H，完全在他们自己中间玩，与另一个集合中的玩家完全没有关系。[①]

我们将用下面的术语描述 Γ、Δ、H 之间的关系：Δ 与 H 的合成产生 Γ。反过来，Γ 能够被分解为 Δ、H 两个成分。[②]

---

① 在35.2的最初博弈中，第二个集合由一个孤立的玩家组成，他也被称为一个“哑玩家”。这暗示着对上述博弈的另一种推广：一个博弈，其中参与者落人两个集合，第一个集合中的参与者严格地在其内部进行一个博弈，而第二个集合中的参与者对该博弈中他们自己的命运和其他玩家的命运都没有任何影响。（那么，这些玩家是“哑玩家”。）

然而，这是正文中一般情况的特例。通过把博弈 H 看作一个非本质博弈，即对于每位参与者来说，该博弈有一个确定的不受其他人影响的值。（见27.3.1和43.4.2末尾，一个非本质博弈中的一位玩家能够通过不恰当的玩法而使其地位退化。对于一个“哑玩家”，我们应该排除这种可能性——不过，这一点并不重要。）

我们将要（对博弈 Δ 和 H 都是本质博弈的情况）给出的一般讨论将实际说明一个新的现象，这一现象是35.2的角 VIII 所描述的特殊情况——即“哑玩家”（H 是非本质博弈）情况中没有出现过的。这个新的现象将在46.7和46.8中讨论，其中任何新的事情都不发生的“哑玩家”情况将在46.9中讨论。——340，①

② 将合成和分解的概念推广到超过两个组成部分似乎是自然的事情。这将在43.2和43.3中给出。——340，②

41.2.2 在我们严格描述上述口头定义之前,一些定性分析是有益的:

第一,应该看到,我们的合成和分解过程与当代数学的很多领域中成功运用的过程类似。① 因为这些事情涉及较高深的数学技术,我们不在这里多说。我们只需说的一点是,我们目前的方法部分地受到这些类似性的驱使。
341 从技术角度看,一个相当令人鼓舞的征兆是,我们即将得出详尽的结果,且这些结果能够用于进一步的解释。

41.2.3 第二,读者也许觉得,合成运算完全是形式的和虚幻的。为什么由两个不相交的玩家集合进行的而且绝对没有相互影响的两个博弈 Δ 和 H 应该被看作一个博弈 Γ 呢?

我们的结果将说明,仅就规则而言,博弈 Δ 和 H 的完全分离未必意味着它们的解也是完全分离的。也就是说:虽然两个玩家集合无法直接相互影响,然而,当它们被当作一个集合——一个社会——时,有可能存在着建立它们之间关系的稳定行为标准。② 这种情况的意义将在我们上面提到的地方得到更加充分的说明。

41.2.4 另外,还应该注意的是,这一合成方法在自然科学和经济学中相当常见。因此,我们完全可以合理地把两个分离的物理系统——举一个极端例子,其中一个在木星上,另一个在天王星上——看作一个系统。同样,我

---

① 见伯克霍夫和麦克雷恩:《当代代数研究》,纽约,1941,第 XIII 章。——340,③

② 这与我们在前面(见 21.3 和 37.2.1)看到的现象有一些类似,即博弈的对称性未必意味着所有解的同一对称性。——341,①

们也可以把几乎没有联系的两个分离的国家的经济看作一个经济。当然,这是引入这些系统之间相互影响力的准备步骤。因此,我们能够在我们的第一个例子中把这两个系统分别选择为木星和天王星本身(两者都在太阳引力范围之内),然后,我们引入这两个行星的相互引力。在我们的第二个例子中,当国际贸易、国际资本流动和移民等受到考虑时,相互影响就进来了。

同样,我们能够把可分解的博弈 Γ 当作迈向与其邻近的其他博弈的台阶,直到不可分解为止。①

然而,在当前的分析中,我们将不考虑后一种修改。我们的兴趣在于这一段的开头提到的解所引入的关系。

41.3 严格定义

41.3.1 接下来,我们对博弈的合成和分解进行严格的数学描述。

令 k 个玩家 $1',\cdots,k'$ 形成集合 $J=(1',\cdots,k')$,参与博弈 Δ;l 个玩家 $1'',\cdots,l''$ 形成集合 $K=(1'',\cdots,l'')$,参与博弈 H。我们重申,Δ 和 H 是不相交的玩家集②,而且,博弈 Δ 和 H 相互之间没有任何影响。用 $v_{\Delta}(S)$ 和 $v_{H}(T)$ 分别记这两个博弈的特征函数,其中 $S\subseteq J$ 且 $T\subseteq K$。 342

① 见 35.3.3,运用于角 I 的邻近,根据 35.2,它是一个可分解的博弈。第 303 页脚注②关于振动的说明也是有意义的。——341,②

② 如果玩家 $1,\cdots,n$ 正同时参与两个博弈,那么,这属于完全不同的情况。这是我们在 27.6.2 和 35.3.4 中提到的博弈的叠加。其对策略的影响十分复杂,而且,如我们在 35.3.4 中指出过的那样,很少是一般规则能够描述的。——341,③

在形成合成博弈 Γ 时，方便的做法是对于其 $n=k+l$ 位玩家使用相同符号 $1',\cdots,k',1'',\cdots,l''$。① 他们形成集合 $I=J\cup K=(1',\cdots,k,1'',\cdots,l'')$。

显然，每个集合 $R\subseteq I$ 允许惟一一个表示。

(41:1) $R=S\cup T,\quad S\subseteq J,\quad T\subseteq K;$

这一公式的逆命题是

(41:2) $S=R\cap J,\quad T=R\cap K$。②

记博弈 Γ 的特征函数为 $v_\Gamma(R)$，$R\subseteq I$。一个初步事实是，博弈 Δ 和 H 无相互影响地结合起来形成 Γ，这一事实有其定量表达：Γ 中一个联盟 $R\subseteq I$ 的值等于博弈 Δ 中 R 的属于 J 的部分 S 的值与博弈 H 中 R 的属于 K 的部分 T 的值之和。其公式为：

(41:3) $v_\Gamma(R)=v_\Delta(S)+v_H(T)$，

其中，R、S、T 满足(41:1)，即(41:2)。③

41.3.2 (41:3)表达了 $v_\Gamma(R)$ 由其两个成分 $v_\Delta(S)$ 和 $v_H(T)$ 合成。然而，它还包含这逆问题的答案：用 $v_\Gamma(R)$ 表达 $v_\Delta(S)$、$v_H(T)$。

事实上，$v_\Delta(\ominus)=v_H(\ominus)=0$。④ 因此，在(41:3)中令 $T=\ominus$ 和 $S=\ominus$ 给出：

---

① 不使用 $1,\cdots,n$。——342,①

② 公式(41:1)和(41:2)有直接口头含义。读者会发现，对其进行阐述是有益的。——342,②

③ 当然，以 25.1.3 为基础进行严格演绎是可行的，且没有困难。25.3.2 的全部内容适用于这种情况。——342,③

④ 注意，空集 $\ominus$ 同时是 J 和 K 的子集。因为 J 和 K 是不相交的，这是它们惟一的共同子集。——342,④

(41:4)　　$v_\Delta(S) = v_\Gamma(S)$，　$S \subseteq J$，

(41:5)　　$v_H(T) = v_\Gamma(S)$，　$T \subseteq K$。①

接下来，我们要表述的是博弈Γ对于 J 和 K 这两个集合的可分解性。也就是说：（在 $I = J \cup K$ 的元素中间的）给定的博弈Γ是这样一个博弈，它能够被分解为两个合适的博弈：一个是（J 的元素中间的）博弈Δ，另一个是（K 的元素中间的）博弈H。如上所述，这是Γ的涉及未知Δ和H的一个隐含性质。但是，它将被表达为Γ的一个明显性质。

事实上：如果这样的Δ和H存在，那么，它们不可能不同于（41:4）和（41:5）所描述的博弈。因此，问题中Γ的性质是，（41:4）和（41:5）的Δ和H满足（41:3）。因 343
此，用（41:3）取代（41:4）和（41:5），用（41:1）以 S，T 表达 R 给出：

(41:6)　　$v_\Gamma(S \cup T) = v_\Gamma(S) + v_\Gamma(T)$，　$S \subseteq J, T \subseteq K$。

或者，如果使用（41:2）（以 R 表达 S，T）取代（41:1）

(41:7)　　$v_\Gamma(R) = v_\Gamma(R \cap J) + v_\Gamma(R \cap K)$，　$R \subseteq I$。

41.3.3　为了正确理解方程（41:6）、（41:7）的作用，我们要重新思考它们所依据的基本原理。这是 41.4—42.5.2 的任务。不过，我们能够直接就这些方程的解释做出两点说明。

第一：（41:6）表达的是，集合 $S \subseteq J$ 与集合 $T \subseteq K$ 之间的联盟没有吸引力——虽然 J 和 K 中的玩家都有联合起

---

① 这是把空集当作一个联盟的好处的一个例子。见第 241 页脚注②。——342，⑤

来的动力，但不存在跨越 J 和 K 的边界的力量。

第二：对于熟悉测度论的读者来说，我们可以继续 27.4.3 末尾的观察：(41:7) 是卡拉西奥德利 (Carathéodory) 的可测性定义。这一概念在可加测度理论中相当基本，而且，卡拉西奥德利方法是迄今为止最强有力的方法。[①] 其在当前内容中的出现是一个值得进一步研究的事实。

41.4 可分解性分析

41.4.1 通过把得自 (41:4)、(41:5) 的 $v_{\Delta}(S)$、$v_{H}(T)$ 代入基本条件 (41:3)，我们得到了 Γ 的可分解性准则 (41:6)、(41:7)。然而，这一演绎中有一个缺陷：我们没有验证是否有可能找到两个博弈 Δ、H 以产生由 (41:4)、(41:5) 正式地定义的 $v_{\Delta}(S)$ 和 $v_{H}(S)$。

把这些条件公式化并不困难。正如我们在 25.3.1 中已知的那样，它们意味着，$v_{\Delta}(S)$ 和 $v_{H}(S)$ 满足条件 (25:3:a)—(25:3:c)。必须理解的一点是，对于最初的博弈 Γ，我们假设一个给定的 $v_{\Gamma}(R)$，即 $v_{\Gamma}(R)$ 满足这些条件。因此，我们有下列问题：

(41:A) $v_{\Gamma}(R)$ 满足 25.3.1 中的 (25:3:a)—(25:3:c) 和 (41:6)，即 (41:7)。(41:4) 和 (41:5) 的 $v_{\Delta}(S)$ 和 $v_{H}(T)$ 也满足 25.3.1 中的 (25:3:a)—(25:3:c) 吗？或者，如果情况

---

① 见卡拉西奥德利：*Vorlesungen über Reelle Funktionen*，柏林，1918，第 V 章。——343，①

不是这样，我们必须对 $v_\Gamma(R)$ 进一步施加什么样的假设？

要回答这一问题，我们分别就 $v_\Delta(S)$ 和 $v_H(T)$ 研究 25.3.1 的(25:3:a)—(25:3:c)。为了方便，顺序上有所改变。

41.4.2　(25:3:a)的证明：根据(41:4)和(41:5)，对于 $v_\Delta(S)$ 和 $v_H(T)$ 来说与对于 $v_\Gamma(R)$ 来说，这是同一个说法。

(25:3:c)的证明：根据(41:4)和(41:5)，这从 $v_\Gamma(S)$ 344
转到了 $v_\Delta(S)$ 和 $v_H(T)$——它等于 $R\subseteq I$ 对 $S\subseteq J$ 和 $T\subseteq K$ 的限制。

在讨论(25:3:b)之前，我们在这里插入一点关于 25.4.1的(25:4)的说明。由于这是(25:3:a)—(25:3:c)的一个结果，我们可以合理地从中得出结论——而且，我们将会看到，这一推测将简化(25:3:b)的分析。

从这里开始，我们将不得不用到 I、J、K 的补集。为了避免混乱，我们有必要回避 $-S$ 这样的记号，将其分别写为 $I-S$、$J-S$、$K-S$。

(25:4)的证明：对于 $v_\Delta(S)$ 和 $v_H(T)$ 来说，集合 I 的作用分别由集合 J 和 K 取代。因此，这一条件变成：

$$v_\Delta(J)=0,$$
$$v_H(K)=0。$$

根据(41:4)和(41:5)，这意味着

(41:8)　$$v_\Gamma(J)=0,$$

(41:9)　$$v_\Gamma(K)=0。$$

由于 $K=I-J$，(25:3:b)(运用于假设对其成立的 $v_\Gamma(S)$)给出

(41:10) $\quad v_\Gamma(J)+v_\Gamma(K)=0$。

因此,根据恒等式(41:10),(41:8)和(41:9)中的一个意味着另一个。

在(41:8)或(41:9)中,我们实际上有一个新的条件,它并非来自(41:6)或(41:7)。

(25:3:b)的证明:我们将从假设的其对 $v_\Gamma(R)$ 成立推出其对 $v_\Delta(S)$ 和 $v_H(T)$ 成立。根据对称性,只需考虑 $v_\Delta(S)$。

要证明的关系是

(41:11) $\quad v_\Delta(S)+v_\Delta(J-S)=0$。

根据(41:4),这意味着

(41:12) $\quad v_\Gamma(S)+v_\Gamma(J-S)=0$。

由(41:8),这可以被重写为

(41:13) $\quad v_\Gamma(S)+v_\Gamma(J-S)=v_\Gamma(J)$。

(当然,$S\subseteq J$。)

要证明(41:13),将关于 $v_\Gamma(R)$ 的(25:3:b)运用于 $R=J-S$ 和 $R=J$。对于这些集合,$I-R=S\cup K$ 和 $I-R=K$。所以,(41:13)变成

$$v_\Gamma(S)-v_\Gamma(S\cup K)=-v_\Gamma(K),$$

即

$$v_\Gamma(S\cup K)=v_\Gamma(S)+v_\Gamma(K),$$

而且,这是 $T=K$ 时(41:6)的特殊情况。

345 因此,我们弥补了上面提到的缺陷并回答了(41:A)的问题。

(41:B) 必须对 $v_\Gamma(R)$ 施加的额外假设是:(41:8),即(41:9)。

所有这些合在一起回答了 41.3.2 中的可分解性问题：

(41:C)　博弈 Γ 是关于集合 J 和 K 可分解的(见 41.3.2)，当且仅当它满足条件：(41:6)，即 (41:7)和(41:8)，即(41:9)。

41.5 修改的必要性

41.5.1 我们在(41:C)中证明的可分解性的两个等价条件具有十分不同的特征。(41:6)[即(41:7)]是真正基本的一个，而(41:8)[即(41:9)]仅仅代表一个相当偶然的条件。我们将在下面严格证明这一点，不过，首先有一个定性分析是有益的。我们的分解概念的原型是 41.2.1开头提到的博弈：该博弈由 35.2 角 VIII 代表。现在，这一博弈满足(41:6)，但不满足(41:8)。前者来自 35.2.1 中的(35:7)，后者来自 $v(J)=v[(1,2,3)]=1\neq 0$。然而，我们把该博弈当作可分解的[$J=(1,2,3)$，$K=(4)$]。这怎么可能呢？它破坏了我们发现的可分解性必要条件(41:8)呀！

41.5.2 答案是简单的：对于上述博弈，[$J=(1,2,3)$中的]Δ 和[$K=(4)$中的]H 这两个成分博弈并不完全满足 25.3.1 中的(25:3:a)—(25:3:c)。严格说，它们不满足 25.4.1 中的结果(25:4)：$v_{\Delta}(J)=v_{H}(K)=0$ 不成立[且我们正是从这个条件中得出(41:8)的]。换句话说：Γ 的成分并非零和博弈。在 35.2.2 中，这一点当然是完全清楚的，且得到了应有的分析。

所以，我们必须尽量回避条件(41:8)，而且要认识到，这可能迫使我们考虑其他零和博弈。

42. 理论的修改

42.1 零和条件的不完全放弃

42.1 对于我们的博弈来说，零和条件的完全放弃①意味着，11.2.3 意义上描述博弈的特征函数 $H_k(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ 不受任何限制。也就是说，11.4 和 25.1.3 的条件

$$(42:1) \qquad \sum_{k=1}^{n} H_k(\tau_1, \cdots, \tau_n) \equiv 0$$

346 被放弃了，且没有引入其他约束条件。由于第 25 节中特征函数的结构依赖于(25:1)，即(42:1)，这必然要求具有重大意义的修改，从而必须重新研究。

这一修改终究是必要的(见第 11 章)，但现在还不是时候。

为了对当前所必需的东西有准确的概念，让我们在接下来的 42.2.1 和 42.2.2 中给出一些辅助分析。

42.2 策略等价：常数和博弈

42.2.1 考虑一个零和博弈 Γ，它可能满足，也可能不满足条件(41:6)和(41:8)。从 Γ 过渡到 27.1.1 和27.1.2 意义上的一个策略等价的博弈 Γ′，有那里描述的 $\alpha_1^0, \cdots, \alpha_n^0$。

① 我们重新用 1,2,⋯,n 记玩家。——345,①

显然,关于 Γ 的(41:6)等价于关于 Γ′的(41:6)。①

对于(41:8)来说,情况则完全不同。从 Γ 过渡到 Γ′将使(41:8)的左边改变 $\sum_{k属于J} \alpha_k^0$,从而(41:8)在一种情况下成立丝毫不意味着它在另一种情况下也成立。事实上,这是对的:

(42:A)　　对于每一个博弈 Γ 来说,选择一个策略等价的博弈 Γ′使后者满足(41:8)是可能的。

证明:这一断言的意思是,我们能够选择 $\alpha_1^0, \cdots, \alpha_n^0$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^0 = 0$[这是 27.1.1 中的(27:1)],使得

$$v(J) + \sum_{k属于J} \alpha_k^0 = 0。$$

如果 $J \neq \ominus$ 或 I,那么,这显然是可能的,因为这样的话 $\sum_{k属于J} \alpha_k^0$ 能够被赋予任何值。如果 $J = \ominus$ 或 I,不存在需要证明的东西,因为那样的话,根据 25.3.3 中的(25:3:a)和 25.4.1 中的(25:4),$v(J) = 0$。

这一结果能够有如下解释:如果我们不考虑非零和博弈②,那么,条件(41:6)表达了,虽然博弈 Γ 本身可能是不可分解的,它策略等价于某个可分解的博弈 Γ′。③

42.2.2 上述严格结果弄清楚了我们目前的方案的缺陷所在。可分解性是一个重要的策略性质,从而,我

---

① 依据 27.1.1 中的(27:2)。要看到,(42:A)的 $v_\Gamma(S)$ 和 $v_\Gamma{}'(S)$ 正是(27:2)的 $v(S)$ 和 $v'(S)$。——346,①

② 即我们不但要求 Γ 是这样,而且还要求 Δ、H 是这样。——346,②

③ 正如第 300 页脚注①的研究所表明的那样,35.2.2 中组成部分的处理完全等于此。——346,③

们感到不便的是，两个策略等价的博弈中，一个可以说是可分解的，而另一个却不可分解。因此，我们希望拓
347 展这些概念，使可分解性变成策略等价下的一个不变性质。

换句话说：我们想修改我们的概念，使得 27.1.1 中定义策略等价的变换(27:2)不干扰一个可分解博弈 Γ 与其组成部分 Δ 和 H 之间的关系。根据(41:3)，这一关系被表达为

(42:2) $\quad v_{\Gamma}(S \cup T)=v_{\Delta}(S)+v_{H}(T), \quad S \subseteq J, T \subseteq K$。

现在，如果我们以同样的 α_k^0 把(27:2)运用于博弈 Γ、Δ、H，那么，(42:2)显然不受干扰。惟一的麻烦是起始条件(27:1)。这是说，对于 Γ、Δ、H，分别有

$$\sum_{k \text{属于} I} \alpha_k^0=0, \quad \sum_{k \text{属于} J} \alpha_k^0=0, \quad \sum_{k \text{属于} K} \alpha_k^0=0。$$

而且，虽然我们现在假设第一个关系成立，另外两个则可能不成立。

因此，一个自然的办法是完全略去 27.1.1 中的(27:1)，即扩大博弈的范围，仅仅按照变换(27:2)，把策略地等价于一个零和博弈的所有博弈都包括进去，不要求(27:1)。

正如我们在 27.1.1 中看到的那样，这等于用一个新的函数取代后者的函数

$$H_k(\tau_1, \cdots, \tau_n)。$$

新的函数是

$$H'(\tau_1, \cdots, \tau_n) \equiv H_k(\tau_1, \cdots, \tau_n)+\alpha_k^0。$$

[$\alpha_1^0, \cdots, \alpha_n^0$ 不再满足(27:1)]。以这一方式从满足 42.1

中的（42：1）的函数 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 的系得到的函数 $H'(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 的系很容易描述。其特征是性质

(42:3)　　$\sum_{k=1}^{n} H'(\tau_1,\cdots,\tau_n) \equiv s$。①

总之：

(42:B)　　我们正在扩大我们所考虑的博弈的范围，从零和博弈过渡到常数和博弈。②　348

42.2.3 我们的上述推广并不改变我们关于策略等价的主要概念。认识到这一点是基本的。我们最好通过考虑如下两点来做到这一点。

首先，我们在 25.2.2 中说过，我们准备仅仅用其特征函数理解一个博弈的所有定量性质。我们必须认识到，现在的博弈与最初的零和博弈一样，我们有充分理由这么做。理由是

(42:C)　　每一个常数和博弈策略等价于一个零和博弈。

证明：变换（27：2）显然用 $s+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^0$ 取代了（42：3）中的 s。这样，我们有可能选择 $\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0$，使 $s+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^0=0$，即

---

① s 是任意一个常数。在把一个零和博弈变换成这一博弈的变换（27:2）中，显然存在着

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^0 = s。$$——347，①

② 这使 42.1 开头的说法有了一个严格的意思，我们尚不具备考虑所有博弈的条件。与此同时，我们拓展了 27.1.1 中引入的策略等价的概念，将其按照变换（27:2）重新定义，但抛弃条件（27:1）。——347，②

把给定的常数和博弈变成一个(策略等价的)零和博弈。

第二,我们新的策略等价概念仅仅对于我们引入的新的(非零和)博弈是必要的。对于原来的(零和)博弈来说,它等价于原来的概念。换句话说:如果两个零和博弈都能够通过 27.1.1 的变换(27:2)相互得到,那么,(27:1)自动得到了满足。事实上,这是我们在第 246 页中已经看到的。

42.3 新理论中的特征函数

42.3.1 给定一个常数和博弈 $\Gamma'[H_k'(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 满足(42:3)],我们能够通过重复 25.1.3 的定义引入其特征函数 v′(S)。① 另一方面,我们可以引入 42.2.2 和 42.2.3 的论述所给出的方法:我们能够像 42.2.2 那样从零和博弈 Γ 的特征函数 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 得到 Γ′的特征函数 $H'(\tau_1,\cdots,\tau_n)$,即选择适当的 α_k^0,令

(42:4) $$H'(\tau_1,\cdots,\tau_n)\equiv H(\tau_1,\cdots,\tau_n)+\alpha_k^0,$$

然后,用 27.1.1 中的(27:2)定义 Γ′的特征函数 v′(S),即

(42:5) $$\mathrm{v}'(S)\equiv \mathrm{v}(S)+\sum_{k\text{属于}S}\alpha_k。$$

349 现在,这两种方法是等价的,即(42:4)和(42:5)的 v′(S)与 25.1.3 重复应用所得到的 v′(S)一致。事实上,25.1.3 的公式直接表明,那里(42:4)的替换的结果是

---

① 尽管 Γ′不再是零和博弈,25.1.3 的整个内容几乎能够被逐字重复。存在两种例外情况。在 25.1.3 的(25:1)和(25:2)中,我们必须在极右端条件上加上 s。[所以如此,原因在于我们现在用(42:3)取代了(31:1)。]这一差异完全无关紧要。——348,①

(42:5)。[1][2]

42.3.2 正如我们在25.3.1和26.2中指出过的那样，v(*S*)是一个零和博弈的一个特征函数，当且仅当它满足25.3.1的条件(25:3:a)—(25:3:c)。(其证明见25.3.3和26.1。)在常数和博弈情况下，这些条件变成什么呢？

为了回答这一问题，让我们牢记，(25:3:a)—(25:3:c)意味着25.4.1中的(25:4)。因此，我们能够把(25:4)添加到它们之中，并修改(25:3:b)，在其右边加上v(*I*)[根据(25:4)，这并不带来任何变化]。因此，全部零和博弈的v(*S*)的特征变成了：

(42:6:a)　　$v(\ominus)=0$,

(42:6:b)　　$v(S)+v(-S)=v(I)$,

(42:6:c)　　$v(S)+v(T)\leqq v(S\cup T)$,

如果 $S\cap T=\ominus$，且

(42:6:d)　　$v(I)=0$。

这样，所有常数和博弈的v′(*S*)得自这些v(*S*)，具体做法是使它们服从42.3.1的变换(42:5)。这一变换如何影响(42:6:a)—(42:6:d)呢？

---

① 不难发现这一分析口头上的等价说法。——349,①

② 假如我们决定仅仅用(42:2)和(42:5)来定义v′(*S*)，会出现模糊性问题。事实上：一个给定的常数和博弈Γ′显然能够通过(42:4)从很多不同的零和博弈Γ得到，那么，(42:5)总给出相同的v′(*S*)吗？

在这种情况下，这一点是不难证明的。然而，没有必要这么做，因为我们已经证明了(42:5)的v′(*S*)总等于25.1.3的v′(*S*)。而且，v′是仅仅借助Γ′毫无含糊地定义的。——349,②

你可以直接验证,(42:6:a)—(42:6:c)丝毫不受影响,而(42:6:d)被彻底破坏了。① 所以,我们看到:

(42:D)　　v(S)是一个常数和博弈的特征函数,当且仅当它满足条件(42:6:a)—(42:6:d)。

[从现在起,我们将 v′(S)写成 v(S)。]

如上所述,(42:6:d)不再成立。然而,我们有

(42:6:d*)　　v(I) = s。

事实上,考虑到 25.1.3 的方法,从(42:3)看,这是明显的。它也能够得自第 347 页的脚注①和上述脚注③[我们的 v(S)是那里的 v′(S)]之间的比较。另外,(42:6:d*)在直觉上也是清楚的:全部玩家的联盟获得这一博弈的固定和 s。

42.4 新理论中的分配、占优和解

350 **42.4.1** 从现在起,我们考虑任何常数和博弈的特征函数,即仅仅满足(42:6:a)—(42:6:c)的函数 v(S)。

在这个更为广阔的范围内,我们的第一个任务自然是把 30.1.1 中定义的分配、占优和解的概念推广到这一范围。

让我们从分配开始。我们能够继承 30.1.1 将其解释为向量:

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}。$$

条件(30:1)和(30:2)中,我们可以保留(30:1):

---

① 根据(42:5),(42:6:d)的右边变成了 $\sum_{i\,属于\,I} \alpha_i^0$,即 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^0$,且这个和是完全随意的。——349,③

(42:7)　　$\alpha_i \geqq v[(i)]$

不变——我们在那里提到的理由现在同样成立。[①] 然而，我们必须修改(30:2)。该博弈的常数和是 s[见(42:3)和(42:6:d*)]，每一种分配都应该是这个数额的分配，即自然地假设

(42:8)　　$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = s。$$

由(42:6:d*)，这等价于(42:8*)　　$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = v(I)$。[②]

我们不加改变地承接 30.1.1 中有效集、占优和解的定义[③]以及有关这些定义的理由。这些定义没有因我们当前的推广受到损伤。

42.4.2　这些分析借助如下观察得到证实：

(42:E)　　对于我们的两个常数和博弈 Γ、Γ′的新的策略等价概念[④]，存在着它们的分配的同构，即 Γ 的分配到 Γ′的分配的一一映射，它保持 30.1.1 中的概念不变。[⑤]

这与 31.3.3 中(31:Q)相似，而且能够以相同方式得到证明。就像我们在那里做的那样，我们把 Γ 的分配 $\vec{\alpha}$ =

---

① $\alpha_i < v[(i)]$ 是不可接受的，见 29.2.1 的开头。——350，①

② 对于零和博弈的特殊情况，$s = v(I) = 0$，所以(42:8)、(42:8*)与(30:2)一致。——350，②

③ 即(30:3)；(30:4:a)—(30:4:c)；(30:5:a)、(30:5:b)或(30:5:c)。——350，③

④ 如 42.2.2 末尾定义的那样，即用 27.1.1 中的(27:2)来定义，放弃(27:1)。——350，④

⑤ 如 42.4.1 中重新定义的那样。——350，⑤

$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$与$\Gamma'$的分配$\vec{\alpha}'=\{\alpha_1',\cdots,\alpha_n'\}$之间的对应

(42:9) $$\vec{\alpha}\leftrightarrows\vec{\alpha}'$$

定义为

(42:10) $$\alpha_k'=\alpha_k+\alpha_k^0。$$

351 其中,$\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0$由27.1.1中的(27:2)定义。

现在,31.3.3中(31:Q)的证明几乎可以一字不漏地照搬过来。一个不同之处是,30.1.1的(30:2)由(42:8)取代,但因27.1.1中(27:2)而给出$v'(I)=v(I)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^0$,这一点也是不言自明的。[①] 回顾31.3,读者就会明白,那里所说的一切都同样适用于当前情况。

42.5 新理论中的本质性、非本质性和可分解性

42.5.1 42.2.3的(42:C)告诉我们,每个常数和博弈策略等价于一个零和博弈。因此,(42:E)允许我们把第31节中来自零和博弈的一般结果转移到常数和博弈,总是通过策略等价从后面的一类过渡到前面的一个。

这迫使我们借助一个常数和博弈与一个非本质零和博弈的策略等价来界定其非本质性。因此,我们可以说:

(42:F) 一个零和博弈是一个非本质博弈的充分

① 而且这是提到的证明中惟一一点,在该点处用到$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^0=0$[即我们不再要求的27.1.1中(27:1)]。——351,①

必要条件是，它策略等价于 $\bar{v}(S) \equiv 0$ 的博弈[见 23.1.3 或 27.4.2 中的(27:C)]。根据上面的论述，对于一个常数和博弈来说，同样的说法正确。(但是，我们必须使用我们的新的非本质性和策略等价的定义。)

本质性当然被定义为非本质性的否定。

42.3.1 的变换公式(42:5)运用于 27.4 的准则表明，仅仅存在一些小的变化。

27.4.1 中的(27:8)必须换成

$$\gamma = \frac{1}{n}\left\{ v(I) - \sum_{j=1}^{n} v[(j)] \right\}, \qquad (42:11)$$

因为这一公式的右边在变换(42:5)下保持不变，而且，对于 $v(I)=0$(即零和博弈)，它就是(27:8)。

用(42:11)取代(27:8)要求 27.4.1 的准则(27:B)中的两个公式的右边的 0 换成 $v(I)$。27.4.2 的准则 352
(27:C)—(27:D)在(42:5)保持不变，从而不受影响。

42.5.2　现在，我们能够回头在较为广泛的常数和博弈范围内讨论 41.3—41.4 中的合成和分解了。

41.3 的所有内容能够被逐字重复。

当我们遇到 41.4 时，那里阐述的问题(41:A)再次出现。为了确定是否需要超出 41.3.2 的(41:6)即(41:7)的假设，我们必须[对于 $v_\Gamma(R)$，$v_\Delta(S)$，$v_H(T)$ 中的每一个]研究 41.3.2 中的(42:6:a)—(42:6:c)，而不是要研究 25.3.1 中的(25:3:a)—(25:3:c)。

完全像 41.4 中的(25:3:a)、(25:3:c)那样，(42:6:a)、(42:6:c)可直接得到证明。至于(42:6:b)和 41.4 中(25:

3:b)的证明基本上是适用的,不过,这里不需要(41:8)或(41:9)那样的额外条件。为简化问题,我们详细给出这一证明。

(42:6:b)的证明:我们将从其对 $v_\Gamma(R)$ 成立推出其对 $v_\Delta(S)$ 和 $v_H(T)$ 成立。由对称性,我们只需考虑 $v_\Delta(S)$。

要证明的关系是

(42:12) $$v_\Delta(S)+v_\Delta(J-S)=v_\Delta(J)。$$

由(41:4),这意味着

(42:12*) $$v_\Gamma(S)+v_\Gamma(J-S)=v_\Gamma(J)。$$

要证明(42:12*),对于 $v_\Gamma(R)$,将(42:6:b)运用于 $R=J-S$ 和 $R=J$。由此,$I-R=S\cup K$ 和 $I-R=K$。所以,(42:12*)变成

$$v_\Gamma(S)+v_\Gamma(I)-v_\Gamma(S\cup K)=v_\Gamma(I)-v_\Gamma(K),$$

即

$$v_\Gamma(S\cup K)=v_\Gamma(S)+v_\Gamma(K),$$

而且,这正是(41:6)$T=K$ 的特殊情况。

因此,我们把41.4的结果(41:6)改进如下:

(42:G) 在全部常数和博弈范围之内,博弈 Γ 是对于集合 J 和 K 来说可分解的(见41.3.2),其充分必要条件是,它满足条件(41:6),即(41:7)。

42.5.3 41.4中(41:C)与42.5.2中(42:G)之间的比较告诉我们,从零和博弈过渡到常数和博弈使我们避开了对于可分解性来说不需要的条件(41:8),即(41:9)。

现在,可分解性仅仅由(41:6)即(41:7)定义,而且如

本来应该的那样，它在策略等价下保持不变。

我们还知道，当一个博弈 Γ 被分解为两个博弈 Δ 和 H（它们都是常数和博弈！）时，我们能够借助策略等价使这些博弈都是零和博弈。［对于 Γ，见 42.2.3 中(42:C)，对于 Δ 和 H，见 42.2.1 中(42:A)。］

因此，我们总能够根据问题需要方便地选择博弈的范 353
围——零和博弈或常数和博弈。

在本章余下的内容中，除非明确说明，我们继续分析常数和博弈。

43. 分解分拆

43.1　裂集和成分博弈

43.1　我们定义了博弈 Γ 的可分解性，不过，这不是就这一博弈本身定义的，而是针对全部玩家集合 I 分解为两个互补的集合 J 和 K 来定义的。

因此，我们可以采取如下态度：把博弈 Γ 看作是给定的，把 J 和 K 看作是可变的。由于 J 决定 K（事实上 $K=I-J$），我们只需把 J 当作变量。这样，我们有如下问题：

给定一个博弈 Γ（有玩家集合 I），对于什么的集合 $J\subseteq I$（和相应的 $K=I-J$）来说，Γ 是可分解的呢？

如果对于 $J(\subseteq I)$ 来说，博弈 Γ 是可分解的，我们称 J 是 Γ 的裂集。在这一分解中［见 41.2.1 和 41.3.2 的

(41:4)]得到的博弈 Δ 是 Γ 的 J - 成分。[①]

因此,裂集 J 由 41.3.2 中的(41:6)即(41:7)定义,其中,$K = I - J$ 必须被代入。

读者将会注意到,这一概念有一个十分简单的直觉含义:一个裂集是一个自足的玩家集合,就规则而言,他们不影响其他玩家,也不受其他玩家影响。

43.2 全部裂集的系的性质

43.2.1 一个博弈的所有裂集整体上由一些简单的性质综合描述。这些性质中的绝大多数具有直接的直觉含义。这也许使得数学证明显得没有必要。不过,我们将系统地前进并给出证明,说明其直觉含义的说明放在脚注中。在随后的讨论中,我们把 Γ 的特征函数 $v_{\Gamma}(S)$ 写成 $v(S)$。

(43:A) J 是一个裂集,当且仅当其补集 $K = I - J$ 是一个裂集。[②]

证明:Γ 的可分解性对称地涉及 J 和 K。

(43:B) $\ominus$ 和 I 是裂集。[③]

证明:由于 $v(\ominus) = 0$,在 $J = \ominus$, $K = I$ 的情况下,(41:6)或(41:7)显然成立。

43.2.2

354 (43:C) 如果 J'、J'' 是裂集,那么,$J' \cap J''$ 和 $J' \cup J''$

---

① 按照同一定义,博弈 H[见 41.2.1 和 41.3.2 中(41:5)]是 Γ 的 K 成分($K = I - J$)。——353,①

② 从 43.1 的意义上说,一个玩家集合是自足的,这显然等于说,其补集也是自足的。——353,②

③ 它们是自足集的说法是套套逻辑。——353,③

也是裂集。①

证明：关于 $J'\cup J''$：由于 J'、J''是裂集，对于 J、K 分别等于 J'、$I-J'$个 J、K，分别等于 J''、$I-J''$，我们有(41:6)。我们希望对于 $J'\cup J''$，$I-(J'\cup J'')$证明(41:6)成立。因此，考虑 $S\subseteq J'\cup J''$，$T\subseteq I-(J'\cup J'')$。令 S'是 J'中 S 的部分，那么，$S''=S-S'$落入 J'的补集，且因 $S\subseteq J'\cup J''$，$S''\subseteq I-J'$和关于 J'，$I-J'$的(41:6)给出

(43:1) $$\mathrm{v}(S)=\mathrm{v}(S')+\mathrm{v}(S'')。$$

接着，$S''\subseteq I-J'$，且 $T\subseteq I-(J'\cup J'')\subseteq I-J'$，所以，$S''\cup T\subseteq I-J'$。还有，$S'\subseteq J'$。显然，$S'\cup(S''\cup T)=S\cup T$。因此，对于 J'，$I-J'$，(41:6)还给出

(43:2) $$\mathrm{v}(S\cup T)=\mathrm{v}(S')+\mathrm{v}(S''\cup T)。$$

最后，$S''\subseteq J''$且 $T\subseteq I-(J'\cup J'')\subseteq I-J''$。所以，对于 J''，$I-J''$，(41:6)给出

(43:3) $$\mathrm{v}(S''\cup T)=\mathrm{v}(S'')+\mathrm{v}(T)。$$

现在，(43:3)代入(43:2)并应用(43:1)得

$$\mathrm{v}(S\cup T)=\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T),$$

这正是我们想要的(41:6)。

---

① 交集 $J'\cap J''$：读者也许感到奇怪，两个自足的集合 J'、J''竟然有一个非空的交集。然而，正如 $J'=J''$的情况所表明的那样，这是可能的。更深层的理由是，一个自足的集合完全可以是一些更小的自足集合(真子集)的和。[见 43.3 中(43:H)。]我们当前的说法是，如果两个自足的集合 J'、J''有一个非空的交集 $J'\cap J''$，那么，这个交集也是这样的自足子集。以这种方式，它显得合理了。

并集 $J'\cup J''$：两个自足的集合的并集也是自足的集合的说法是合理的。当一个非空的交集 $J'\cap J''$存在时，这也许显得难以理解，但正如上面的讨论那样，这种情况的确无害。下面的证明实际上是这种情况的初步严格考虑。——354，①

关于 $J'\cap J''$:应用(43:A)和上述结果。由于 J',J''是裂集,所以 $I-J',I-J'',(I-J')\cup(I-J'')$都是裂集,后者显然是 $I-(J'\cap J'')$[①]和 $J'\cap J''$,这正是我们想要的表达式。

43.3 全部裂集的系的特征与分解分拆

43.3.1 也许,除了⊖和 I 之外,不存在其他裂集[见(43:B)]。在这种情况下,我们称博弈 Γ 为**不可分解博弈**。[②] 我们暂时将这一问题搁置一旁[③],继续研究 Γ 的裂集。

355 (43:D) 考虑 Γ 的一个裂集 J 和 Γ 的 J-成分 Δ。那么,$J'\subseteq J$ 是 Δ 的一个裂集,当且仅当它是 Γ 的一个裂集。[④]

证明:考虑(41:4),根据(41:6),当

(43:4) $\mathrm{v}(S\cup T)=\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T)\quad S\subseteq J',T\subseteq J-J'$

时,J'是 Δ 的一个裂集。[我们把 $\mathrm{v}_\Gamma(S)$写成 $\mathrm{v}(S)$。]根据(41:6),当

(43:5) $\mathrm{v}(S\cup T)=\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T)\quad S\subseteq J',T\subseteq I-J'$

时,J'是 Γ 的一个裂集。

我们必须证明(43:4)与(43:5)等价。因为 $J\subseteq I$,故

---

① 交集的补集等于补集的并集。——354,②

② 实际上,大多数博弈是不可分解的,不然的话 42.5.2 中的准则(42:G)要求 41.3.2 中的约束方程(41:6)和(41:7)。——354,③

③ 见脚注③及其中提到的内容。——354,④

④ 要在一个自足的集合之内成为一个自足的集合,这等于在最初的(总)集合中成为一个自足集合。这一说法似乎是显然的。从其证明来看,事情并非如此。——355,①

(43:4)显然是(43:5)的一个特例,从而我们只需证明(43:4)意味着(43:5)。

假设(43:4)成立。我们可以对有 J、$K=I-J$ 的 Γ 利用(41:6)。

考虑 $S\subseteq J'$,$T\subseteq I-J'$。令 T' 是 T 属于 J 的部分,那么,$T''=T-T'$属于 $I-J$。所以,$T=T'\cup T''$,$T'\subseteq J$,$T''\subseteq I-J$,且对于有 J、$I-J$ 的 Γ,(41:6)给出

(43:6) $$\mathrm{v}(T)=\mathrm{v}(T')+\mathrm{v}(T'')。$$

然后,$S\subseteq J'\subseteq J$ 且 $T'\subseteq J$,所以,$S\cup T'\subseteq J$。还有,$T''\subseteq I-J$。显然,$(S\cup T')\cup T''=S\cup T$。所以,对于有 J、$I-J$ 的 Γ,(41:6)还给出

(43:7) $$\mathrm{v}(S\cup T)=\mathrm{v}(S\cup T')+\mathrm{v}(T'')。$$

最后,$S\subseteq J'$且 $T'\subseteq I-J'$,所以 $T'\subseteq J-J'$。因此,(43:4)给出

(43:8) $$\mathrm{v}(S\cup T')=\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T')。$$

现在,把(43:8)代入(43:7)并根据(43:6)简化右端就是我们想要的(43:5)。

43.3.2 (43:D)使得这样一些裂集 J 值得考虑,$J\neq\ominus$,但 J 的任何非空真子集 J'都不是裂集。我们理所当然地称这样的集合 J 为最小裂集。

根据不可分解性和最小裂集的定义。(43:D)直接意味着:

(43:E) Γ 的 J 成分 Δ 是不可分解的,当且仅当 J 是一个最小裂集。

最小裂集是具有非常简单性质的一类集合,而且,它们决定着所有裂集的总和。我们有下述命题:

(43:F) 任意两个不同的最小裂集不相交。

(43:G)　所有最小裂集的并集等于 I。

356 (43:H)　通过形成最小裂集的所有可能的聚合的所有并集，我们恰好得到全部裂集的总和。[①]

证明：(43:F)的证明：令 J'、J''是两个并非不相交的最小裂集。那么，根据(43:C)，$J'\cap J''\neq\ominus$是裂集，因为它$\subseteq J'$且$\subseteq J''$。这样，J'和J''的最小性意味着$J'\cap J''$等于J'，也等于J''。所以，$J'=J''$。

(43:G)的证明：只需证明 I 中每一个 k 属于某个最小裂集即可。

存在着包含玩家 k 的裂集（即 I）。令 J 是它们的交集。根据(43:C)，J 是裂集。如果 J 不是最小的，那么，存在一个裂集 $J'\neq\ominus$，$J'\subseteq J$。那么，根据(43:A)和(43:C)，$J''=J-J'=J\cap(I-J')$也是一个裂集，且显然有 $J''\neq\ominus$，J。J'、$J''=J-J'$之一必定包含 k。如 J'包含 k，那么，J'就是以 J 作为其交集的那些集合之一。所以，$J'\supseteq J$。但优于 $J'\subseteq J$ 且 $J'\neq J$，这是不可能的。

(43:H)的证明：根据(43:C)，最小裂集的并集总是裂集，所以，我们只须证明其逆命题。

令 K 是一个裂集。如果 J 是一个最小裂集，那么，根据(43:C)，$J\cap K$ 是裂集，且 $J\cap K\subseteq J$，从而，要么 $J\cap K=\ominus$，要么 $J\cap K=J$。在第一种情况下，J 和 K 不相交；在第二种情况下，$J\subseteq K$。我们看到：

(43:I)　每个最小裂集 J 要么与 K 不相交，要么$\subseteq K$。

---

① 这些断言的直觉意思应该是相当清楚的。它们以一种合理的方式描述了 Γ 的分解的最大可能性的结构。——356，①

令 K' 是前者情况下的并集，K'' 是后者情况下的并集。$K' \cup K''$ 是所有最小裂集的并集，因此，根据(43:G)，

(43:9)　　$K' \cup K'' = I$。

根据它们来源，K' 与 K 不相交且 $K'' \subseteq K$。即

(43:10)　　$K' \subseteq I - K$，　$K'' \subseteq K$。

现在，(43:9)、(43:10)合起来要求 $K'' = K$。所以，K 是最小集合的一个适当聚合的并集。

43.3.3　(43:F)、(43:G)弄清楚了的一点是，最小裂集形成 8.3.1 意义上的分拆，其并集是 I。我们称之为 Γ 的*分解分拆*，记为 Π_Γ。现在，(43:H)能够被表达为：

(43:H*)　　一个裂集 $K \subseteq I$ 由下述性质描述：当 K 受到关注时，Π_Γ 的每一个元素的点都聚集在一起，即 Π_Γ 的元素要么完全在 K 之内，要么在 K 之外。

因此，Π_Γ 表达了，在 I 中，在不破坏 Γ 的规则所建立 357
的玩家关系的情况下，Γ 能够被分解到什么程度。[1] 由(43:E)，Π_Γ 的元素也可以由这样一个事实描述，即它们把 Γ 分解为不可分解的成分。

43.4　分解分拆的性质

43.4.1　分解分拆 Π_Γ 的本质已经得到证明，我们自然要研究这一分拆的精细程度的效应。我们只希望分析两个极端情况：一种情况是，Π_Γ 精细得不能再精细了，即它把 I 分拆成一元集；另外一种情况是，Π_Γ 粗糙得不能再

① 即不破坏结果集合的自足性。——357,①

粗糙了,即它根本不分拆 I。换句话说:在第一种情况下,Π_Γ 是(I 中)全部一元集的系;在第二种情况下,Π_Γ 仅仅由 I 组成。

这两个极端情况的含义不难得到说明:

(43:J) Π_Γ 是(I 中)全部一元集的系,当且仅当该博弈是一个本质博弈。

证明:根据(43:H)或(43:H*),显然 Π_Γ 的上述性质等于说所有集合 $J(\subseteq I)$ 都是裂集。也就是说,根据 43.1,对于任意两个互补的集合 J 和 $K(=I-J)$,该博弈是可分解的。这意味着,在这些情况下,(41:6)成立。然而,这意味着,(41:6)加在 S,T 上的条件(即 $S\subseteq J, T\subseteq K$)仅仅意味着 S 和 T 不相交而已。因此,我们的说法变成了

$$v(S\cup T)=v(S)+v(T),\quad S\cap T=\ominus。$$

这样,这恰好是 27.4.2 中(27:D)给出的非本质性的条件。

(43:K) Π_Γ 由 I 组成,当且仅当博弈 Γ 不可分解。

证明:根据(43:H)[或(43:H*)],Π_Γ 的上述性质显然等于说,惟有 $\ominus$ 和 I 是裂集。但是,这正是 43.3 开头不可分解性的定义。

这些结果表明,对于一个博弈来说,不可分解性与非本质性是两个极端情况。尤其是,非本质性意味着,43.3 末尾描述的 Γ 的分解能够进行到单个玩家,且不破坏博弈 Γ 的规则建立的关系。① 读者应该将这一说法与我们最初在 27.3.1 中给出的非本质性的定义比较。

① 即这一博弈中的每一位玩家都是自足的。——357,②

43.4.2　非本质性、可分解性和玩家个数之间的联系是：

$n=1$：这种情况极少有实际意义。这样一个博弈显然是不可分解的①，与此同时，根据 27.5.2 中的第一项说明，它是非本质的。

应该注意的一点是，根据（43：J）、（43：K），当 $n\geqq 2$ 时，不可分解性与非本质性是不相容的，但 $n=1$ 时就不是这样。 358

$n=2$：根据 27.5.2 的第一点说明，这样一个博弈也必然是非本质博弈。因此，它是可分解的。

$n\geqq 3$：对于这些博弈，可分解性是一种例外情况。事实上，可分解性意味着（41：6）中有 $J\neq\ominus, I$。因此，$K=I-J\neq\ominus, I$。所以，我们能够在 J 中选择 j，在 K 中选择 k，那么，在（41：6）中令 $S=(j)$，$K=(k)$，这给出

（43：11）　$\mathrm{v}[(j,k)]=\mathrm{v}[(j)]+\mathrm{v}[(k)]$。

这样，$\mathrm{v}(S)$ 必须满足的方程式惟有 25.3.1 的（25：3：a）、（25：3：b），（如果考虑的是零和博弈）或 42.3.2 的（42：6：a）、（42：6：b）。（43：11）不属于这两种情况任何一个，因为（43：11）中只有集合 (j)、(k) 和 (j,k)，且当 $n\geqq 3$ 时，②这些集合不是那些方程式中出现的集合——即，$\ominus$、I 或互补的集合。因此，（43：11）是一般来说得不到满足的额外条件。

根据上述论述，一个不可分解的博弈不可能有 $n=2$，

---

① 因为 I 是一个一元集，惟有 $\ominus$ 和 I 是其子集。——357，③

② 对于 $n=2$，情况则不同。$(j,k)=I$ 且 (j) 与 (k) 互补。——358，①

因此它有 $n=1$ 或 $n\geqq 3$。结合(43:E),我们得到下述结果:

(43:I) 分解分拆 Π_{Γ} 的每一个元素要么是一个一元集,要么有 $n\geqq 3$ 个元素。

注意,Π_{Γ} 中的一元集是一元裂集[①]——即它们对应着这样一些玩家,(从联盟策略的角度看)他们是自足的,与该博弈中其他玩家分离的。从35.2.3和第340页脚注①的意义上说,他们是“哑玩家”。所以,我们的结果(43:L)表达了这样一个事实:那些不是“哑玩家”的玩家被分组为不可分解的、有 $n\geqq 3$ 个玩家成分博弈。

这似乎也是社会组织的一般原理。

44. 可分解博弈:理论的进一步推广

44.1 一个可分解的博弈的解及其成分的解

359 **44.1** 我们已经完成了关于合成和分解的描述工作。接下来,让我们进入这一问题的核心:研究一个可分解的博弈的解。

考虑一个博弈 Γ,它是对于 J 和 $I-J=L$ 来说可分解的,有 J-和 K-两个成分博弈 Δ、H。正如42.5.3开头解释的那样,我们能够用策略等价将三个博弈都变成零和博弈。

假设 Δ 的解和 H 的解是已知的,那么,Γ 的解是确定

① 这样一个裂集自然是最小裂集。——358,②

的吗？换句话说：一个可分解的博弈的解如何得自其成分的解？

这方面存在着一个看似合理的猜测，我们下面的任务是严格证明这一猜测。

44.2　分配和分配集的合成与分解

44.2.1　让我们使用 41.3.1 中的符号。但是，由于我们把 $\mathrm{v}_\Gamma(S)$ 写成了 $\mathrm{v}(S)$，根据(41:4)、(41:5)，这也取代 $\mathrm{v}_\Delta(S)$、$\mathrm{v}_H(S)$。

另一方面，我们要就 Γ、Δ、H 区别分配。[1] 在表达这一区别时，我们最好指明一个分配所涉及的玩家集合，而不是这些玩家所参与的博弈。也就是说，我们将记为 I、J、K，而不是 Γ、Δ、H。在这个意义上说，我们把对于 I 来说(即 Γ)的分配记为

(44:1)　$$\vec{\alpha}_I=\{\alpha_{1'},\cdots,\alpha_{k'},\alpha_{1''},\cdots,\alpha_{l''}\},$$

而且对于 J,K(即 Δ,H)来说的解分别记为

(44:2)　$$\vec{\beta}_J=\{\beta_{1'},\cdots,\beta_{k'}\},$$

(44:3)　$$\vec{\gamma}_K=\{\gamma_{1''},\cdots,\gamma_{l''}\}。$$

如果这三个分配通过如下关系联系着，

(44:4)　$$\begin{aligned}\alpha_{i'}&=\beta_{i'},\quad i'=1',\cdots,k',\\ \alpha_{j''}&=\gamma_{j''},\quad j''=1'',\cdots,l'',\end{aligned}$$

那么，我们说，$\vec{\alpha}_I$ 得自 $\vec{\beta}_J$、$\vec{\gamma}_K$ 的合成，$\vec{\beta}$、$\vec{\gamma}$ 得自 $\vec{\alpha}_I$(就 J 和 K 而言)的分解，而且 $\vec{\beta}_J$、$\vec{\gamma}_K$ 分别是 $\vec{\alpha}_I$ 的(J,K)成分。

---

[1] 这里，重新引入 41.3.1 中的玩家符号能够带来方便。——359，①

由于我们正在研究的是零和博弈，所有这些分配必定满足 30.1.1 中条件(30:1)、(30:2)。你可以直接验证，$\vec{\alpha}_I$、$\vec{\beta}_J$、$\vec{\gamma}_K$ 的确满足(44:4)。

30.1.1 的(30:1)的证明：对于 $\vec{\beta}_J$、$\vec{\gamma}_K$ 来说，这一结果的成立显然等价于其对于 $\vec{\alpha}_I$ 成立。

30.1.1 的(30:2)的证明：对于 $\vec{\beta}_J$、$\vec{\gamma}_K$ 来说，[利用(44:4)]这是说，

(44:5) $$\sum_{i'=1'}^{k'} \alpha_{i'} = 0,$$

(44:6) $$\sum_{j''=1''}^{l''} \alpha_{j''} = 0。$$

对于 $\vec{\alpha}_I$ 来说，它等于

(44:7) $$\sum_{i'=1'}^{k'} \alpha_{i'} + \sum_{j''=1''}^{l''} \alpha_{j''} = 0。$$

360 因此，其对 $\vec{\beta}_J$、$\vec{\gamma}_K$ 成立意味着其对 $\vec{\alpha}_I$ 成立，但其对 $\vec{\alpha}_I$ 成立并不意味着其对 $\vec{\beta}_J$、$\vec{\gamma}_K$ 成立。事实上，(44:7)意味着(44:5)和(44:6)的等价，但它并不意味着其中之一成立。

我们有：

(44:A) 任何两个分配 $\vec{\beta}_J$、$\vec{\gamma}_K$ 都能够被合成为一个 $\vec{\alpha}_I$，而一个分配 $\vec{\alpha}_I$ 能够被分解为 $\vec{\beta}_J$、$\vec{\gamma}_K$，当且仅当它满足(44:5)，即(44:6)

我们称这样一个分配 $\vec{\alpha}_I$(对于 J、K)可分解。

44.2.2 这种情况类似于有关博弈本身的情况：合成总是可能的，而分解则未必。可分解性再次成了例

外情况。[1]

最后，还应该注意的是，分配的合成有着简单的直觉含义。它对应着“把两个独立出现的分配看作一个”的运算，这一运算在 41.2.1、41.2.3、41.2.4 中对于博弈来说也发挥着相应的作用。$\vec{\alpha}_I$ 分解（为 $\vec{\beta}_J,\vec{\gamma}_K$）是可能的，当且仅当两个自足的玩家集合 J,K 由分配 $\vec{\alpha}_I$ 的玩家集合给定它们“应得的数额”——它们等于 0。这正是条件（44:A）[即（44:5）、（44:6）]的含义。

44.2.3　考虑分配 $\vec{\beta}_J$ 的集合 V_J，分配 $\vec{\gamma}_K$ 的集合 W_K。令 U_I 是这样一些分配 $\vec{\alpha}_I$ 组成的集合，这些分配 $\vec{\alpha}_I$ 得自 V_J 中所有分配 $\vec{\beta}_J$ 与 W_K 中所有分配 $\vec{\gamma}_K$ 的合成。我们说，U_I 得自 V_J 与 W_K 的合成，V_J、W_K 得自 U_I（对于 J、K）的分解，V_J、W_K 是 U_I 的（J - 、K - ）成分。

显然，无论 V_J、W_K 是什么，合成运算总能够进行，然而，一个给定的 U_I 未必允许（对 J、K）的分解。如果 U_I 能够被分解，那么，我们将其称为（对于 J、K 来说的）可分解。

注意，U_I 的这一可分解性是一个十分强的约束条件。这意味着，其他事情不说，U_I 的所有元素 $\vec{\alpha}_I$ 必须是可分解的（见 44.2.2 末尾的解释）。

为了就分配集 U_I、V_J、W_K 更为详细地解释这些概念，一个方便的做法是仅仅讨论博弈 Γ、Δ、H 的解。

---

[1] 对于博弈而言的可分解性与对于分配而言的可分解性之间存在着巨大差异。然而，我们还是要看到 41.3.2 中（41:4）、（41:5）；41.4.2 中（41:8）、（41:9）、（41:10）；（44:4）、（44:5）、（44:6）、（44:7）之间的相似性。——360，①

44.3 解的合成与分解:主要结果

361 **44.3.1** 令 V_J、W_K 分别是博弈 Δ、H 的解。它们的合成生成一分配集 U_J,我们期望 U_J 是博弈 Γ 的一个解。事实上,U_J 是我们在下面能够表述的一个行为标准的表达。我们将在(44:B:a)—(44:B:c)中给出口头表述,在脚注中给出等价数学描述,正如读者将会验证的那样,这补充了我们的合成定义。

(44:B:a) *J* 的玩家总是恰好得到其"应得的数额"(0),对于 *K* 的玩家来说也是这样。[1]

(44:B:b) 集合 *J* 中玩家的命运与集合 *K* 中玩家的命运之间没有任何联系。[2]

(44:B:c) *J* 中玩家的命运受制于行为标准 V_J[3],*K* 中玩家的命运受制于行为标准 W_K。[4]

如果两个成分博弈被设想为完全相互独立地进行,那么,这显然是将它们的独立解 V_J、W_K 看作合成博弈 Γ 的一个解 U_J 的一个合理方式。

然而,由于一个解是一个严格的概念,这一断言需要证明,也就是说,我们必须证明:

---

① U_J 的每个元素 $\vec{\alpha}$ 都可分。——361,①

② 通过合成,建立 U_J 时使用的任一 $\vec{\beta}_J$ 和建立 U_J 时使用的任一 $\vec{\gamma}_K$ 给出 U_J 的一个元素 $\vec{\alpha}_I$。——361,②

③ 上面提到的 $\vec{\beta}_J$ 恰好是 V_J 的元素。——361,③

④ 上述 $\vec{\gamma}_K$ 恰好是 W_K 的元素。——361,④

(44:C)　　如果 V_J、W_K 分别是 Δ、H 的解，那么，它们的合成 U_I 是 Γ 的一个解。

44.3.2 这是常识与数学严格性之间的典型关系的一个例子。基于常识的断言(当前情况中，只要 V_J、W_K 是解，那么，U_I 就是一个解)固然是需要的，但除非在数学上得到证明，它在理论(当前情况中的定义 30.1.1)上就是站不住脚的。从这个意义上说，严格比常识更重要。然而，这进一步受到另一种考虑的限制，如果数学证明未能证明常识性的结果，那么，我们就更有理由拒绝整个理论。因此，数学方法的主要任务是以一种非常识的方式对理论进行验证。

我们将证明，(44:C)虽然不十分重要，却是正确的。 362

我们也许预计(44:C)的逆命题也是正确的，即希望证明：

(44:D)　　如果 U_I 是一个解，那么，它能够被分解为 Δ、H 的解 V_J、W_K。

表面上看，这是相当合理的：由于 Γ 是两个完全独立的博弈的合成，Γ 的解怎么会不表现出这个合成结构呢？

然而，令人吃惊的是，(44:D)一般来说并不成立。读者也许会想，如果我们真的接受上述方法论说明，那么，我们就应该放弃我们的理论，至少做出实质性的修改。然而，我们将证明，对于(44:D)来说，"常识"基础相当可疑。事实上，我们的结果与(44:D)矛盾，我们将提供一个十分合理的解释，从而成功地将其与社会组织中众所周知的现象联系起来。

44.3.3 我们要做出相当详细的分析才能正确理解(44:D)和用于取代它的理论的正确性。为此,我们首先指出(44:D)如何不成立。

一个自然的做法是,把(44:D)分成两个断言:

(44:D:a) 如果 U_I 是 Γ 的一个解,那么,它是(对于 J,K)可分解的。

(44:D:b) 如果 Γ 的一个解 U_I 是(对于 J,K)可分解的,那么,它的成分 V_J、W_K 分别是 Δ、H 的解。

我们将会看到,(44:D:b)是正确的,而(44:D:a)是错误的。也就是说,能够发生这样的事情,一个可分解的博弈 Γ 有一个不可分解的解。①

然而,一个解(或任何一个分配集)的可分解性是由 44.3.1 中的(44:B:a)—(44:B:c)表达的。所以,这些条件中的某些必定对于上述不可分解的解不成立。我们将会看到(见 46.11),未得到满足的条件是(44:B:a)。这也许令人十分灰心,因为(44:B:a)是基本条件,如果它不成立,条件(44:B:b)、(44:B:c)甚至无法描述。

分解的概念有一定的弹性。这在 42.2.1、42.2.2、42.5.2 中有所表现,那里,通过修改概念,我们成功地避开了一个不方便的辅助条件,它与博弈的可分解性联系着。我们还将看到,按照这种方法,我们将再次遇到困难,所以,(44:D)将由一个正确且令人满意的定理取代。

① 这类似于这样一个现象:一个对称的博弈可以有一个不对称的解。——362,①

因此，我们必须修改我们的方案，使条件(44:B:a)能够被忽略。

我们将在这方面取得成功，从而(44:B:b)、(44:B:c)不会给我们制造困难，一个完美的结果将展现在我们面前。

44.4 理论的推广：外部来源

44.4.1 现在是略去我们在 44.1 中(暂时)引入的正规化的时候了：我们考虑的博弈是零和博弈。我们回到 42.2.2 的观点，根据那里的观点，博弈是常数和博弈。 *363*

理解这些之后，考虑一个博弈 Γ，它是(对于 J,K)可分解的，其两个成分是 J - 成分 Δ 和 K - 成分 H。

如 44.2.1、44.2.2 中给定的那样，分配的可合成性和可分解性理论能够无显著改动地在这里重复。(44:1)—(44:4)可以一字不漏地照搬过来，而(44:5)—(44:7)也只须修改其右边。由于 30.1.1 的(30:2)已经被 42.4.1 的(42:8*)取代，公式(44:5)—(44:7)现在变成

(44:5*) $$\sum_{i'=1'}^{k'} \alpha_{i'} = \mathrm{v}(J),$$

(44:6*) $$\sum_{j''=1''}^{l''} \alpha_{j''} = \mathrm{v}(K),$$

且

(44:7*) $$\sum_{i'=1'}^{k'} \alpha_{i'} + \sum_{j''=1''}^{l''} \alpha_{j''} = \mathrm{v}(I) = \mathrm{v}(J) + \mathrm{v}(K)。$$

[最后一个方程的右边来自 42.3.2 中(42:6:b)或 41.3.2 中(41:6)中令 $S = J, T = K$。]这种情况恰似 44.2.1，事实

上，它来自与 42.4.2 同构的情况。因此，$\vec{\alpha}_I$ 满足(44:7*)，但其可分解性需要条件(44:5*)、(44:6*)。而且，(44:7*)的确意味着(44:5*)和(44:6*)的等价，但它并不意味着其中之一成立。

这样，44.2.1 中的可分解性准则(44:A)再次成立，只不过我们的(44:5*)、(44:6*)取代了(44:5)、(44:6)。而且，44.2.2 的最终结论可以被重述为：$\vec{\alpha}_I$ 的分解（为 $\vec{\beta}_J$、$\vec{\gamma}_K$）是可能的，当且仅当两个自足的玩家集合 J、K 恰好按照这个 $\vec{\alpha}_I$ 获得应得的数额，现在，这些数额是 v(J)、v(K)。①

由于我们知道分配的可分解性的这一限制——44.3.1 中(44:B:a)的理由——是困难来源之一，我们不得不将其去除。这意味着条件(44:5*)、(44:6*)的去除，即最初来自 42.4.1 中的条件(42:8*)的去除。

44.4.2 根据上面的论述，我们将用一个新的分配概念构筑常数和博弈 Γ 的理论。这个新的分配概念的基础仅仅是 42.4.1 的(42:7)[即 30.1.1 的(30:1)]，不再要求 42.4.1 中的(42:8*)。换句话说，②

364 一个扩展的分配是数 $\alpha,\cdots,\alpha_n$ 的一个系，它具有如下性质：

(44:8) $\alpha_i \geqq \mathrm{v}[(i)],\quad i=1,\cdots,n$。

我们不对 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$ 施加任何约束条件。我们也将这些扩展的

① 不再是原来情况下的零。——363，①

② 我们重新用 1，…，n 记玩家。——363，②

分配看作向量

$$\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}。$$

44.4.3 现在,我们必须充分考虑以分配的概念为基础的定义,即 30.1.1 和 44.2.1 的那些定义。不过,在此之前,我们最好解释一下扩展的分配这个概念。

这一概念的实质是,它代表着玩家之间特定数额的分布,但不要求它们的和应该等于博弈 Γ 的常数和。

对于仅仅相互打交道的玩家来说,这样的安排是外来的。然而,我们已经把一个分配想像为提交给全部玩家的一个分配方案。(这种想法到处可见,例如,在 4.4、4.5 中;其在 4.4.1 中相当明确。)这样一个建议也许来自某个玩家①,不过,这无关紧要。我们同样能够想像的是,外部来源向 Γ 的玩家们提交各种各样的分配供其考虑。所有这些与我们过去的分析协调,不过,这些“外部来源”只是在提出建议时才出现,不对博弈成果做出贡献,也不参与成果分享。

44.5 剩余

44.5.1 现在,扩展的分配概念可以被用于表达,“外部来源”能够提出建议,做出贡献或分享成果,即转移成果。对

① 他试图建立一个联盟。由于我们把整个分配看作他的建议,这必然要求我们假设他甚至正在向他一些玩家提出他的建议,这些玩家将不被包括在这个联盟之中。对于这些玩家,他可能提议给他们各自的最小值 v[(i)](也可能更多,见 38.3.2 和 38.3.3)。也许还存在着介于“被接纳和被排斥”之间的玩家(见 37.1.3 的第二种情况)。当然了,那些不那么受青睐的玩家有可能使其不满显效,这导致占优的概念等。——364,①

于扩展的分配 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 来说，这一转移数额是

$$(44{:}9)\qquad e=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-\mathrm{v}(I),$$

并被称为 $\vec{\alpha}$ 的**剩余**。因此，

$$(44{:}10)\qquad \begin{array}{ll} e>0, & \text{做出贡献}, \\ e=0, & \text{不发生转移}, \\ e<0, & \text{分享成果}。\end{array}$$

365 为了使提出的问题切合实际，我们要对此做出适当限制，而且我们将赋予其应得的数额。

重要的一点是，要认识到这些转移与该博弈如何相互影响。这些转移是来自外部的建议的部分，通过权衡，按照占优准则等，它们可能被玩家们接受或拒绝。[①] 在这一方法的进程中，没有得到满足的玩家集合可以回到博弈 Γ，这是它们关于（扩展的）分配的偏好的有效性的惟一准则。[②] 因此，博弈——我们考虑中的社会过程的物质背景——决定着组织的各个方面的稳定性，但借助外部建立起来的初始状态，受上面提到的剩余的约束。

44.5.2 剩余受到的最简单“约束”是明确描述其取值 e。在对此做出解释时，我们应该牢记(44:10)。

---

① 这当然是社会过程的一个狭隘的、甚至可能是有点随意的描述。不过，应该牢记，我们仅仅将其用于实现如下确定的和有限的目的：为了确定稳定的均衡状态，即解。4.6.3 末尾的总结说明应该已经把这一点讲清楚了。——365，①

② 我们当然暗指有效性和占优的定义，见 4.4.1 和 4.4.3 开头，其严格形式见 30.1.1。44.7.1 中，我们将把严格定义扩展到我们的当前概念。——365，②

当 $e>0$ 或 <0 时，存在着的情况似乎是自相矛盾的。

尤其当 $e<0$ 的时候，即当试图从外部抽取博弈成果时。为什么能够回到一个常数和 $v(I)$ 博弈的玩家应该接受一个更小的和呢？也就是说，基于这样一个准则的“行为标准”，一个“社会秩序”，怎么能够是稳定的呢？然而，答案是有的：如果所有玩家形成一个联盟，统一行动，该博弈的值是 $v(I)$。但是，如果他们分列为敌对的组，那么，每个组就必须较悲观地估计它的机会，而且这样的划分有可能使一个比 $v(I)$ 更小的总和稳定存在。①

当 $e>0$，即当外部干预是一个免费的礼物时，这种情况似乎不那么难以令人接受。但是，在这种情况下，为了 366
理解这个礼物在玩家们中间的分配如何能够服从一个稳定的安排，我们必须研究该博弈。由于他们有可能参与各种联盟的可能性，它们的机会的乐观估计将决定玩家的要求。我们的理论必须考虑到他们的调整能够得到

---

① 就最初的试探性定量分析来看，如果这些玩家被分成不相交的集合（联盟）$S_1,\cdots,S_p$，那么，它们的值的和是 $v(S_1)+\cdots+v(S_p)$。根据 42.3.2 中的(42:6:c)，这个和 $\leq v(I)$。

奇怪的是，根据 42.3.2 中的(42:6:b)，当 $p=2$ 时，这个和实际上 $=v(I)$。也就是说，在这个模型中，三个或多个组之间的相互不和是造成破坏的实际原因。

显然，根据 42.3.2 中的(42:6:c)，上述之和 $v(S_1)+\cdots+v(S_p)\geq\sum_{i=1}^{n}v[(i)]$。另一方面，后者是前者中的一个[令 $p=n,S_i=(i)$]。所以，当每位玩家都独立于其他玩家时，破坏最大。

当 $\sum_{i=1}^{n}v[(i)]=v'(I)$ 时，即当博弈是非本质博弈时，上述现象消失。[见 42.5.1 中(42:11)。]——365，③

的和。

44.6 对剩余的限制:新结构中一个博弈的非孤立特征

44.6.1 这些分析表明,剩余 e 既不能太小($e<0$ 时),也不能太大($e>0$ 时)。在前一种情况下,有可能出现的局面是,其中每个玩家都倾向于重来,即便最坏的情况发生,即如果他不得不独立行动。[①] 在后一种情况下,将会发生"免费礼物""太大"的事情,即任何可以想像的联盟中的玩家都不可能提出如此高的要求以至分净这个总和。这样,礼物过大成了现有社会秩序的破坏成分了。

我们将在第 45 节中看到,这些定性分析是正确的,而且我们将通过严格演绎来得到它们发挥作用的细节,并得到严格有效剩余值。

44.6.2 在所有这些分析中,博弈 Γ 不能够再被看作一个独立发生的事情,原因在于剩余是一个外部来源的贡献或抽取。这使我们想到,这些概念应该与博弈 Γ 的分解理论联系起来。成分博弈 Δ 和 H 的确不再是完全独立的,而是相互依存的。[②] 因此,我们应该以原来的方式看待合成博弈 Γ(即将其看作一个独立的博弈),还是以新的

---

① 当提议的总数额 $v(I)+e<\sum_{i=1}^{n}v[(i)]$ 时,这种事情就会发生。根据 42.5.1 中的(42:11),后一个表达式等于 $v(I)-n\gamma$,这意味着 $e<-n\gamma$。

我们将在 45.1 中看到,这恰好是 e"太小"的准则。——366,①

② 尽管就规则而言,不存在"相互影响"。见 41.2.3 和 41.2.4。——366,②

方式来看待它，这是一个值得争议的问题，不过，我们有充分理由如此看待 Δ 和 H。然而，我们将看到，对于 Γ 来说，这一含糊性并不从根本上影响结果，有关 Δ 和 H 的较宽容的态度的确是必要的（见 46.8.3 和 46.10）。

当一个博弈 Γ 在上述意义上被看作一个非独立的事情时，在有着外来贡献或抽取的情况下，我们会试图采取如下做法：将这一外部来源也当作一个玩家，将其与其他玩家合起来构造一个更大的博弈 Γ′。（包括 Γ 的）Γ′的规则必须设计得为希望发生的转移提供一个机制。借助我们的最终结果，我们应该能够满足这一要求，不过，这一问题有一定的难度，不适合放在这里讨论。

44.7　新结构 $E(e_0)$ 和 $F(e_0)$ 的讨论

44.7.1　重新考虑 44.4.3 开头提到的旧定义是一件 367
十分简单的事情。

对于*扩展的分配*来说，我们有 44.4.2 的新定义和我们从 30.1.1 一成不变地继承过来的有效性和占优定义[①]——那里的讨论中提出的这些定义的理由似乎不会因为我们这里的推广而被削弱。这同样适用于解的定义[②]，不过，需要小心的一点是：一个解的定义使解的概念尤其依赖于从中求解的所有分配组成的集合。现在，在我们目前的扩展的分配的结构中，我们将不得不考虑44.5.1 中指出的有关它们的约束——尤其关于它们的剩余。这

① 即(30:3)；(30:4:a)—(30:4:c)。—367，①

② 即(30:5:a)、(30:5:b)或(30:5:c)。——367，②

些约束将决定将要受到考虑的所有扩展的分配组成的集合以及解的概念。

44.7.2 特别地，我们将考虑两种类型的约束。

第一，我们将考虑剩余值预先给定的情况。这样，我们有一个等式

(44:11) $$e = e_0,$$

其中，e_0 是给定的。这一约束的含义是，从 44.5.2 的讨论的意义上说，来自外部的转移是预先给定的。

第二，我们将考虑剩余的一个上限被预先给定的情况。这样，我们有一个不等式

(44:12) $$e \leqq e_0,$$

其中，e_0 是给定的。这一约束的含义是，来自外部的转移被赋予一个最大值（从收到转移的玩家的角度看）。

我们真正感兴趣的情况是第一种情况，即 44.5.2 那样的情况。第二种情况从技术上说对于澄清第一种情况来说是有用的——虽然其引人初看似乎是随意的。我们不考虑其他情况，因为我们将仅能够以这两种情况来完成上述讨论。

用 $E(e_0)$ 记满足(44:11)的全部扩展分配组成的集合（第一种情况）。考虑到 44.5.1 中的(44:9)，我们能够把(44:11)写成

(44:11*) $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \mathrm{v}(I) + e_0。$$

用 $F(e_0)$ 记满足(44:12)的全部扩展分配组成的集合（第二种情况）。考虑到 44.5.1 中的(44:9)，我们能够把(44:12)写成

(44:12*) $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqq v(I) + e_0。$$

为了完美,我们重述一个扩展分配的特征,这必须添加于 368
(44:11*)及(44:12*):

(44:13) $\alpha_i \geqq v[(i)], \quad i=1,\cdots,n。$

注意,定义(44:9)以及定义(44:11*)、(44:12*)和(44:13)在 42.4.2 的同构下保持不变。

44.7.3 现在,我们能够继承 30.1.1 中解的定义。由于这一概念的核心作用,我们重述这一定义,并根据现在的条件进行调整。从今以后,如[ ]中指明的那样,定义 $E(e_0)$ 能够由 $F(e_0)$ 取代。

一个集合 $V \subseteq E(e_0)[F(e_0)]$ 对于 $E(e_0)[F(e_0)]$ 来说是一个解,当且仅当它具有如下性质:

(44:E:a) V 中不存在一个 $\vec{\beta}$ 被 V 中的一个 $\vec{\alpha}$ 占优。

(44:E:b) $E(e_0)[F(e_0)]$ 的每个不属于 V 的 $\vec{\beta}$ 都被 V 中某个 $\vec{\alpha}$ 占优。

(44:E:a)和(44:E:b)能够被重述为一个条件:

(44:E:c) V 的元素是 $E(e_0)[F(e_0)]$ 的这样一些元素,它们不被 V 的任何元素占优。

你会注意到,$E(0)$ 使我们回到最初的 30.1.1(零和博弈)和 42.4.1(常数和博弈)。

44.7.4 扩展分配的合成、分解和成分的概念再次能够由 44.2.1 的(44:1)—(44:4)定义。如 44.4.2 中指出过的那样,我们扩展分配概念的技术目的至此得到实现。

分解和合成可以进行了。

这些概念与集合 $E(e_0)$ 和 $F(e_0)$ 之间的联系并非如此简单。我们将在必要的时候研究它。

对于扩展分配所组成的集合的合成、分解和成分来说，44.2.3 的定义现在能够被一字不漏地重复。

45. 对剩余的限制和扩展的理论结构

45.1 剩余的下限

45.1 在 30.1.1 和 42.4.1 的结构中，分配总是存在的。现在的情况则不同：对于特定的 e_0，集合 $E(e_0)$、$F(e_0)$ 都有可能是空集。显然，当 44.7.2 的(44:11*)或(44:12*)与(44:13)冲突时，这类事情就会发生，而且

$$v(I) + e_0 < \sum_{i=1}^{n} v[(i)]$$

时，情况就是这样。根据 42.5.1 中的(42:11)，右边等于 $v(I) - n\gamma$，这意味着

(45:1) $$e_0 < -n\gamma。$$

369 如果 $E(e_0)[F(e_0)]$ 是空的，那么，对于一个空集来说，空集显然是一个解，而且，又因为它是它的惟一子集，它也是其惟一的解。① 另一方面，如果 $E(e_0)[F(e_0)]$ 不

---

① 尽管它无足轻重，这种情况却不应被忽略。这里的正文实际上是第 278 页脚注②的重复。——369，①

是空集，那么，其解不可能是空集。此后是31.2.1中(31:J)的证明的重复。

不等式(45:1)的右边由博弈Γ决定。我们引入下述记号[正负号相反且利用42.5.1中的(42:11)]：

(45:2)　$$|\Gamma|_1 = n\gamma = \mathrm{v}(I) - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{v}[(i)]。$$

我们把我们的结果总结如下：

(45:A)　如果

$e_0 < |\Gamma|_1$，

那么，$E(e_0)$、$F(e_0)$是空集，而且空集是其惟一解。不然的话，$E(e_0)$、$F(e_0)$和它们的解都不会是空集。

这一结果给出了第一个信号，即44.6.1意义上"太小"的e_0(即e)值存在。实际上，它证实了第366页脚注①的定量估计。

45.2　剩余的上限：独立分配和完全独立分配

45.2.1　现在，让我们转向这样的e_0(即e)值，从44.6.1意义上说，它们"太大"。在什么情况下，e的大小的扰乱影响显现出来？

正如44.6.1中指明的那样，一个重要的现象是：剩余可能太大，大于任何联盟提出的要求。下面，我们对这一想法进行定量描述。

我们最好考虑扩展分配$\vec{\alpha}$本身，而不是其剩余。如果$\vec{\alpha}$给予每一(非空)集合$S \subseteq I$的玩家的数额超过这些玩家们通过在Γ中结盟来得到的数额，即如果

(45:3) $\sum_{i属于S} \alpha_i > v(S)$ $S \subseteq I$ 是非空集，

那么，这样一个 $\vec{\alpha}$ 超过任何联盟有可能提出的要求。将其与 30.1.1 中(30:3)比较表明，我们的准则等于要求每一个非空集 S 是一个对于 $\vec{\alpha}$ 而言的无效集。

在我们的具体演绎中，把等号这一极限情况包括进去，扩大(45:3)的确是有好处的。这样，上述条件变成

370 (45:4) $\sum_{i属于S} \alpha_i \geqq v(S)$ $S \subseteq I$。①

为了方便，我们给这样的 $\vec{\alpha}$ 一个名字，称(45:3)的 $\vec{\alpha}$ 为完全独立的分配，称(45:4)的那些 $\vec{\alpha}$ 为独立的分配。如上所述，后者的确是我们的证明中需要的概念，两者都意味着，这里的扩展分配独立于博弈，即它不可能在该博弈之内得到任何联盟的有效支持。

45.2.2 另外一点有益的说明是：

扩展分配受到的惟一限制是 44.7.2 的(44:13)：

(45:5) $\alpha_i \geqq v[(i)], i = 1, \cdots, n$。

现在，如果独立性条件(45:4)得到满足，从而如果完全独立性条件(45:3)得到满足，那么，假设(45:5)是不必要的。事实上，(45:5)是(45:4)$S = (i)$ 的特殊情况。这个说明将在下面的证明隐含地用到。

45.2.3 现在，我们能够回到剩余，即描述那些属于独立(或完全独立)分配的性质。正式的描述是：

(45:B) 博弈 Γ 决定一个数 $|\Gamma|_2$，它有如下性质：

---

① 没有必要排除 $S = \ominus$ 的情况，因为，不像(45:3)那样，当 $S = \ominus$ 时，(45:4)成立。事实上，此时，两边都等于零。——370，①

(45:B:a) 一个有剩余 e 的完全独立的分配存在的必要条件是，

$$e > |\Gamma|_2。$$

(45:B:b) 一个有剩余 e 的独立分配存在的完全必要条件是，

$$e \geqq |\Gamma|_2。$$①

证明：独立分配 $\vec{\alpha}$ 的存在性：②令 α^0 是所有 $v(S)$ 的最大值，$S \subseteq I$[所以 $\alpha^0 \geqq v(\ominus) = 0$]。令 $\vec{\alpha}^0 = \{\alpha_1^0, \cdots, \alpha_n^0\} = \{\alpha^0, \cdots, \alpha^0\}$。这样，对于每个非空的 $S \subseteq I$，我们有 $\sum_{i属于S} \alpha_i^0 \geqq \alpha^0 \geqq v(S)$。这正是(45:4)，所以 $\vec{\alpha}^0$ 是独立的。

独立的 $\vec{\alpha}$ 的性质：根据上面的论述，独立的 371

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

是存在的，而且它们有剩余 $e = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - v(I)$。根据(45:4)($S = I$)，这些 $e \geqq 0$。因此，根据连续性，这些 e 有最小值 e^0。选择一个 $\vec{\alpha}^{\cdot} = \{\alpha_1^{\cdot}, \cdots, \alpha_n^{\cdot}\}$，使其有这一剩余。③

---

① 这些说法直觉上的意思相当简单：显然，为了产生一个独立的或完全独立的分配，一个(正的)最小剩余是必需的。$|\Gamma|_2$ 就是这个最小值，或下限。由于"独立"与"完全独立"之间的不同只是一个极限情况[(45:4)的等号]，说它们有相同下限是站得住脚的。这些情况在(45:B)中得到了严谨的表达。——370，②

② 注意，这一证明是必要的！我们在这里给出的估计是粗糙的，较精确的估计见(45:F)。——370，③

③ 由于(45:4)包括等号"="情况，连续性是成立的。——371，①

我们令

(45:6) $$|\Gamma|_2 = e^*。$$

(45:B:a)和(45:B:b)的证明:如果 $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 是独立的,那么,按照定义,$e = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \mathrm{v}(I) \geqq e^*$。如果 $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 是完全独立的,那么,如果从每个 α_i 中减去一个充分小的数 $\delta > 0$,(45:3)仍然保持成立。这样,$\vec{\alpha}' = \{\alpha_1 - \delta, \cdots, \alpha_n - \delta\}$ 是独立的。因此,按照定义,$e - n\delta = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \delta) - \mathrm{v}(I) \geqq e^*, e > e^*$。

现在,考虑独立的 $\vec{\alpha}^* = \{\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*\}$,它满足

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* - \mathrm{v}(I) = e^*。$$

那么,对于 $\vec{\alpha}^*$ 来说,(45:4)成立。因此,如果我们在每个 α_i^* 上加上一个 δ,那么,(45:3)成立。所以,$\vec{\alpha} = \{\alpha_1^* + \delta, \cdots, \alpha_n^* + \delta\}$ 是完全独立的。其剩余是 $e = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^* + \delta) - \mathrm{v}(I) = e^* + n\delta$。所以,每个 $e = e^* + n\delta, \delta > 0$,即每个 $e > e^*$,是一个完全独立分配的剩余——对于一个独立分配来说更是如此。而且,e^* 当然地是一个独立分配 $\vec{\alpha}^*$ 的剩余。

故,对于(45:6)、(45:B:a)和(45:B:b)的各个部分都成立。

45.2.4 完全独立的扩展分配和独立的扩展分配还与占优的概念有密切联系。其中涉及的性质将在(45:C)和(45:D)中给出。它们相互形成对照。这是引人注目的,因为这两个概念十分相似——事实上,前者去掉其极

限情况就是后者。

(45:C)　　一个完全独立的扩展分配 $\vec{\alpha}$ 不占优其他扩展分配 $\vec{\beta}$。 372

证明：如果 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$，那么，$\vec{\alpha}$ 必定有一个非空有效集。

(45:D)　　一个扩展分配 $\vec{\alpha}$ 是独立的，当且仅当它不被其他扩展分配 $\vec{\beta}$ 占优。

证明：充分性：令 $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 是独立的。假设 $\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$，有有效集 S。那么，S 不是空集。对于 S 中的 i，$\alpha_i < \beta_i$。所以，$\sum_{i属于S} \alpha_i < \sum_{i属于S} \beta_i \leqq \mathrm{v}(S)$，这与(45:4)矛盾。

必要性：假设 $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 不是独立的，令 S 是一个(非空)集合，对于 S 来说，(45:4)不成立，即 $\sum_{i属于S} \alpha_i < \mathrm{v}(S)$，那么，对于一个充分小的 $\delta > 0$，

$$\sum_{i属于S} (\alpha_i + \delta) \leqq \mathrm{v}(S)。$$

令 $\vec{\beta} = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\} = \{\alpha_1 + \delta, \cdots, \alpha_n + \delta\}$，那么，总有 $\alpha_i < \beta_i$ 且 S 是 $\vec{\beta}$ 的有效集：$\sum_{i属于S} \beta_i \leqq \mathrm{v}(S)$。从而，$\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$。

45.3　关于两个界限的讨论：它们的比率

45.3.1　正如 45.1 的(45:2)和 45.2.3 的(45:B)中定义的那样，数 $|\Gamma|_1$ 和 $|\Gamma|_2$ 都定量地衡量 Γ 的本质性。更确切地说：

(45:E)　　如果 Γ 是非本质博弈，那么，$|\Gamma|_1 = 0$，$|\Gamma|_2 = 0$。
　　如果 Γ 是本质博弈，那么，$|\Gamma|_1 > 0$，$|\Gamma|_2 > 0$。

证明：有关 $|\Gamma|_1$ 的说法是得自 45.1 中的(45:2)

$|\Gamma|_1 = n\gamma$，如 42.5.1 中强调的那样，这与 27.3 的非本质博弈和本质博弈的定义相符。

根据(45:F)的可用于这里的不等式，有关$|\Gamma|_2$的说法得自有关$|\Gamma|_1$的那些说法。

45.3.2 $|\Gamma|_1$ 与 $|\Gamma|_2$ 之间的数量关系是

(45:F) $$\frac{1}{n-1}|\Gamma|_1 \leqq |\Gamma|_2 \leqq \frac{n-2}{2}|\Gamma|_1。$$

373 证明：如我们所知，$|\Gamma|_1$ 和 $|\Gamma|_2$ 是策略等价下的不变量，因此我们可以假设博弈 Γ 是零和博弈，甚至有 27.1.4 意义上的简化型。这样，我们就能够使用 27.2 的记号和关系了。

因为$|\Gamma|_1 = n\gamma$，我们要证明的是

(45:7) $$\frac{1}{n-1}\gamma \leqq |\Gamma|_2 \leqq \frac{n(n-2)}{2}\gamma。$$

(45:7)的第一个不等式的证明：令 $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 是独立的。那么，对于$(n-1)$元集 $S = I - (k)$，(45:4)给出

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \alpha_k = \sum_{i\text{属于}S} \alpha_i \geqq \mathrm{v}(S) = \gamma,$$

即

(45:8) $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \alpha_k \geqq \gamma。$$

就 $k = 1, \cdots, n$ 加总(45:8)给出

$$n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_k \geqq n\gamma。$$

即

$$(n-1) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geqq n\gamma, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geqq \frac{n}{n-1}\gamma。$$

由于 $v(I)=0$，故 $e=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$。因此，对于所有独立分配，$e\geqq\frac{n}{n-1}\gamma$，从而 $|\Gamma|_2\geqq\frac{n}{n-1}\gamma$。

(45:7)的第二个不等式的证明：

令 $\alpha^{00}=\frac{n-2}{2}\gamma$，$\vec{\alpha}^{\cdot\cdot}=\{\alpha_1^{00},\cdots,\alpha_n^{00}\}=\{\alpha^{00},\cdots,\alpha^{00}\}$.

$\vec{\alpha}^{\cdot\cdot}$ 是独立的，即对于所有 $S\subseteq I$，它满足(45:4)。事实上：令 p 是 S 的元素个数。我们有：

$p=0$：$S=\ominus$，(45:4)是无所谓的；

$p=1$：$S=(i)$，(45:4)变成 $\alpha^{00}\geqq v[(i)]$，即显然成立的 $\frac{n-2}{2}\gamma\geqq-\gamma$。

$p\geqq2$：(45:4)变成 $p\alpha^{00}\geqq v(S)$，但是，根据 27.2 中的(27:7)，

$$v(S)\leqq(n-p)\gamma,$$

所以，只需 $p\alpha^{00}\geqq(n-p)\gamma$，即 $p\frac{n-2}{2}\gamma\geqq(n-p)\gamma$。这等于 $p\frac{n}{2}\gamma\geqq n\gamma$，当 $n\geqq2$ 时，该式成立。

因此，$\vec{\alpha}^{\cdot\cdot}$ 的确是独立的。因为 $v(I)=0$，剩余是

$$e^{00}=n\alpha^{00}=\frac{n(n-2)}{2}\gamma。$$

所以，$|\Gamma|_2\leqq\frac{n(n-2)}{2}\gamma$。

45.3.3 值得就 $n=1,2,3,4,\cdots$ 逐一考虑(45:F)的不等式。 374

$n=1,2$：在这两种情况下，该不等式的下界的系数

$\frac{1}{n-1}$大于上界的系数$\frac{n-2}{2}$。[①] 这似乎是荒谬的。但是，由于 $n=1,2$ 时，Γ 必然是非本质博弈（见 27.5.2 中第一点说明），在这两种情况下，我们的 $|\Gamma|_1=0$，$|\Gamma|_2=0$，这样，矛盾就消失了。

$n=3$：在这种情况下，两个系数$\frac{1}{n-1}$和$\frac{n-2}{2}$相等：两者都是$\frac{1}{2}$。这样，该不等式变成一个等式：

(45:9) $$|\Gamma|_2=\frac{1}{2}|\Gamma|_1。$$

$n\geqq 4$：在这些情况下，下界的系数$\frac{1}{n-1}$肯定小于上界的系数$\frac{n-2}{2}$。[②] 这样，该不等式为 $|\Gamma|_2$ 留下了一个非空区间。

下界 $|\Gamma|_2=\frac{1}{n-1}|\Gamma|_1$ 是精确的，即对于每个 $n\geqq 4$，存在一个本质博弈，对于这一博弈来说，$|\Gamma|_2=\frac{1}{n-1}|\Gamma|_1$。对于每个 $n\geqq 4$，还存在着 $|\Gamma|_2>\frac{1}{n-1}|\Gamma|_1$ 的本质博弈，不

---

① 对于 $n=1$，它们是∞和$-\frac{1}{2}$；对于 $n=2$，它们是 1 和 0。还要注意到相悖的值∞和$-\frac{1}{2}$！——374，①

② $\frac{1}{n-1}<\frac{n-2}{2}$意味着 $2<(n-1)(n-2)$，当 $n\geqq 4$ 时，该不等式显然成立。——374，②

过，我们的不等式的上界 $|\Gamma|_2 = \frac{n-2}{2}|\Gamma|_1$ 可能永远也达不到。上界的精确值尚未被确定。我们不在这里更多地讨论这些事情。[①]

45.3.4 以较定性分析的方式，我们可以说，$|\Gamma|_1$ 和 $|\Gamma|_2$ 都是博弈 Γ 的本质性的定量测度。它们以两种不同且在一定程度上独立的方式衡量它。事实上，对于 $n=1,2$（没有本质博弈 1），比率 $|\Gamma|_2/|\Gamma|_1$ 不存在；对于 $n=3$（其值等于 $\frac{1}{2}$），它是一个常数；对于 $n\geqq 4$ 的博弈，它是可变的。

我们在 45.1 和 45.2 中看到，这两个数量实际上度量着两个界限，从 44.6.1 意义上说，在这两个界限范围之内，一个强加的剩余将不会“扰乱”玩家。按我们的结果判断，一个剩余 $< -|\Gamma|_1$ “太小”，而一个剩余 $e > |\Gamma|_2$ “太大”。这一观点将在 46.8 中从更精确意义上得到证实。

45.4 独立分配与各种解

联系 $E(e_0)$、$F(e_0)$ 的定理

45.4.1 44.7.3 中解的定义中的（44:E:c）和 45.2.4 中的结果（45:D）直接给出： 375

（45:G）　　对于 $E(e_0)$ [$F(e_0)$] 来说，一个解 V 必须

---

① 对于 $n=4$，我们的不等式是 $\frac{1}{3}|\Gamma|_1 \leqq |\Gamma|_2 \leqq |\Gamma|_1$。如上所述，我们知道一个有 $|\Gamma|_2 = \frac{1}{3}|\Gamma|_1$ 的本质博弈和一个有 $|\Gamma|_2 = \frac{1}{2}|\Gamma|_1$ 的本质博弈。——374，③

包含 $E(e_0)$[$F(e_0)$]的每个独立扩展分配。

这一结果的重要性在于其在以下分析中的作用。

根据44.7.2开头关于 $E(e_0)$ 和 $F(e_0)$ 的作用的讨论，建立这两种情况的完备相互关系的重要性是显然的。也就是说，我们必须确定对于 $E(e_0)$ 和 $F(e_0)$ 而言的解之间的联系。

现在，$E(e_0)$ 和 $F(e_0)$ 以及它们的解之间的联系难以从直觉上进行评价。很难先验地看出为什么应该存在着任何差异：在第一种情况下，玩家们得自外部的"礼物"有预先给定的值 e_0；在第二种情况下，它有预先给定的最大值 e_0。很难看出，在一个"稳定的"行为标准（即解）中，愿意贡献 e_0 的这一"外部来源"怎么能够被允许贡献得少于 e_0。然而，我们过去的经验将再次警告我们，不要在这方面鲁莽下结论。因此，我们在33.1和38.3中看到，三人和四人博弈有这样的解，其中一个孤立的和失败的玩家没有被"剥夺"到物质上允许的极限，目前的情况有类似之处。

45.4.2 (45:G)允许我们做出一项较为具体的陈述：

根据(45:G)，如果一个独立扩展分配 $\vec{\alpha}$ 属于 $F(e_0)$，那么，它属于每个对于 $F(e_0)$ 而言的解。另一方面，如果 $\vec{\alpha}$ 不属于 $E(e_0)$，那么，它显然不可能属于对于 $E(e_0)$ 而言的解。我们定义：

(45:10) $D^*(e_0)$ 是属于 $F(e_0)$ 但不属于 $E(e_0)$ 的所有独立扩展分配 $\vec{\alpha}$ 的集合。

这样，我们看到：$F(e_0)$ 的任何解包含 $D^*(e_0)$ 的全部元素；

$E(e_0)$的任何解不包含$D^*(e_0)$的元素。所以，如果$D^*(e_0)$不是空集，那么，$F(e_0)$和$E(e_0)$肯定无共同解。

现在，$D^*(e_0)$的独立 $\vec{\alpha}$ 的特征是，它有一个剩余$e \leqq e_0$，但没有$e = e_0$，即

(45:11) $$e < e_0。$$

由此，我们有如下结论：

(45:H) $D^*(e_0)$是空集的充分必要条件是

$$e_0 \leqq |\Gamma|_2。$$

证明：由(45:B)和(45:11)，$D^*(e_0)$不是空集等价于一个满足$|\Gamma|_2 \leqq e < e_0$的e的存在。即等价于$e_0 > |\Gamma|_2$。因此，$D^*(e_0)$是空集等于说$e_0 \leqq |\Gamma|_2$。 376

当$e_0 > |\Gamma|_2$时，$F(e_0)$和$E(e_0)$的解肯定不同。这进一步证实了，当$e_0 > |\Gamma|_2$时，e_0对于正常行为来说"太大了"。

45.4.3 现在，我们能够证明，上边指出的不同是$E(e_0)$和$F(e_0)$的解之间的惟一不同。更确切地说：

(45:I) 关系

(45:12) $$V \leftrightarrows W = V \cup D^*(e_0)$$

在$E(e_0)$的所有解 V 与$F(e_0)$的所有解 W 之间建立一个一一对应关系。

这将在下一节中得到证明。

45.5 定理证明

45.5.1 我们先证明几个辅助引理。

第一个引理是一个十分明显的结果，但其用途十分广泛：

(45:J) 设两个扩展分配 $\vec{\gamma}=\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}$ 和 $\vec{\delta}=\{\delta_1,\cdots,\delta_n\}$ 有如下关系：

(45:13) $\gamma_i \geqq \delta_i,\quad i=1,\cdots,n,$

那么，对于每个 $\vec{\alpha}$，$\vec{\alpha}\succ\vec{\gamma}$ 意味着 $\vec{\alpha}\succ\vec{\delta}$。

这一结果的含义是，(45:13)表达了 $\vec{\gamma}$ 较 $\vec{\delta}$ 的某种低劣性——尽管占优的缺乏传递性。然而，这一低劣性并不像我们期望的那么完备。因此，我们不能从 $\vec{\delta}\succ\vec{\beta}$ 推断 $\vec{\gamma}\succ\vec{\beta}$，因为对于 $\vec{\delta}$ 来说，一个集合 S 的有效性并不意味着对于 $\vec{\gamma}$ 来说同样的有效性。（请读者回忆 30.1.1 的基本定义。）

还应该看到的一点是，(45:J)出现仅仅因为我们有扩展的分配概念。对于我们原有的概念（见 42.4.1）来说，我们有 $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i=\sum_{i=1}^{n}\delta_i$。因此，对于所有 $i=1,\cdots,n,\gamma_i\geqq\delta_i$ 必然要求对于所有 $i=1,\cdots,n,\gamma_i=\delta_i$，即 $\vec{\gamma}=\vec{\delta}$。

45.5.2 接下来，我们的四个引理直接给出(45:I)的证明。

(45:K) 如果 $\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$，$\vec{\alpha}$ 是独立的且属于 $F(e_0)$，$\vec{\beta}$ 属于 $E(e_0)$，那么，存在一个 $\vec{\alpha}'\succ\vec{\beta}$，$\vec{\alpha}'$ 是独立的且属于 $E(e_0)$。

377 证明：令 S 是 30.1.1 中关于占优 $\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$ 的(30:4:a)—(30:4:c)的集合。$S=I$ 意味着 $\alpha_i>\beta_i, i=1,\cdots,n$，所以

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-\mathrm{v}(I)>\sum_{i=1}^{n}\beta_i-\mathrm{v}(I)。$$

但是，$\vec{\alpha}$ 属于 $F(e_0)$ 且 $\vec{\beta}$ 属于 $E(e_0)$，所以 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - v(I) \leqq e_0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i - v(I)$，矛盾。

所以，$S \neq I$。选择一个不属于 S 的 $i_0 = 1, \cdots, n$。定义 $\vec{\alpha}' = \{\alpha_1', \cdots, \alpha_n'\}$，它满足

$$\alpha_{i_0}' = \alpha_{i_0} + \varepsilon,$$
$$\alpha_i' = \alpha_i, \quad i \neq i_0,$$

选择 $\varepsilon \geqq 0$，使 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i' - v(I) = e_0$。从而，所有 $\alpha_i' \geqq \alpha_i$。所以，$\vec{\alpha}'$ 是独立的，而且它显然属于 $E(e_0)$。由于对于 $i \neq i_0$，$\alpha_i' = \alpha_i$，所以，对于所有属于 S 的 i，$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 意味着 $\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}$。

(45:L)　　对于惟一的 $V \subseteq E(e_0)$，$F(e_0)$ 的每个解 W 具有(45:I)的(45:12)那样的形式。①

证明：显然，问题中的 V，如果存在的话，是交集 $W \cap E(e_0)$，所以它是惟一的。为使(45:12)对于

$$V = W \cap E(e_0)$$

来说成立。我们只需 W 的其余部分等于 $D^*(e_0)$，即

(45:14)　　$W - E(e_0) = D^*(e_0)$。

因此，我们要证明的是(45:14)。

$D^*(e_0)$ 的每个元素是独立的且属于 $F(e_0)$，所以，按照(45:G)，它属于 W。又因它不属于 $E(e_0)$，所以它属于

① 我们尚未断定这个 V 就是 $E(e_0)$ 的一个解——这是(45:M)中的事情。——377，①

$W-E(e_0)$。故

(45:15) $W-E(e_0)\supseteq D^*(e_0)$。

如果也有

(45:16) $W-E(e_0)\subseteq D^*(e_0)$,

那么,(45:15)、(45:16)合起来给出(45:14)。

用反证法。假设(45:16)不成立。相应地,考虑一个
378 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$,它属于 $W-E(e_0)$ 且不属于 $D^*(e_0)$。这样,$\vec{\alpha}$ 属于 $F(e_0)$,但不属于 $E(e_0)$,从而 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-\mathrm{v}(I)<e_0$。由于 $\vec{\alpha}$ 不属于 $D^*(e_0)$,这就排除了它是独立的。因此,存在着一个非空集合 S,有 $\sum_{i\text{属于}S}\alpha_i<\mathrm{v}(S)$。

现在,构造 $\vec{\alpha}'=\{\alpha_1',\cdots,\alpha_n'\}$,使

$$\alpha_i'=\alpha_i+\varepsilon,\quad i\text{ 属于 }S,$$

$$\alpha_i'=\alpha_i,\quad i\text{ 不属于 }S,$$

选择 $\varepsilon>0$,使 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'-\mathrm{v}(I)\leqq e_0$ 且 $\sum_{i\text{属于}S}\alpha_i'\leqq\mathrm{v}(S)$。故,$\vec{\alpha}'$ 属于 $F(e_0)$。如果它不属于 W,那么,(由于 W 是 $F(e_0)$ 的一个解)W 中存在一个 $\vec{\beta}$ 有 $\vec{\beta}\succ\vec{\alpha}'$。因为所有 $\alpha_i'\geqq\alpha_i$,按照(45:J),这意味着 $\vec{\beta}\succ\vec{\alpha}$。这是不可能的,因为 $\vec{\beta}$ 和 $\vec{\alpha}$ 都属于(解)W。所以,$\vec{\alpha}'$ 必定属于 W。这样,对于 S 中所有的 i,$\alpha_i'>\alpha_i$,且 $\sum_{i\text{属于}S}\alpha_i'\leqq\mathrm{v}(S)$。所以,$\vec{\alpha}'\succ\vec{\alpha}$。但是,$\vec{\alpha}$、$\vec{\alpha}'$ 都属于(解)W,这是一个矛盾。

(45:M) (45:L)的 V 是 $E(e_0)$ 的一个解。

证明:$V\subseteq E(e_0)$ 是显然的事情,且因为 $V\subseteq W$,V 和 W

[$F(e_0)$的一个解]一样满足44.7.3的(44:E:a)。所以，我们只需验证44.7.3的(44:E:b)。

考虑一个属于$E(e_0)$但不属于V的$\vec{\beta}$。那么，$\vec{\beta}$也属于$F(e_0)$但不属于W，因此，W中存在一个$\vec{\alpha}$，有$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$。[W是$F(e_0)$的解!]如果这个$\vec{\alpha}$属于$E(e_0)$，那么，它属于$W\cap E(e_0)=V$，即我们有一个属于$E(e_0)$的$\vec{\alpha}$，满足$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$。

如果$\vec{\alpha}$不属于$E(e_0)$，那么，它属于$W-E(e_0)=D^*(e_0)$，且它是独立的。因此，$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$，$\vec{\alpha}$独立且属于$E(e_0)$。根据(45:G)，这个$\vec{\alpha}'$属于W。[$E(e_0)\subseteq F(e_0)$，W是$F(e_0)$的一个解!]所以它属于$W\cap E(e_0)=V$。这样，我们有一个$\vec{\alpha}'$，它属于$E(e_0)$且满足$\vec{\alpha}'\succ\vec{\beta}$。

故，44.7.3的(44:E:b)成立。

(45:N)　　如果V是$E(e_0)$的一个解，那么，(45:I)中(45:12)的W是$F(e_0)$的一个解。

证明：显然，$W\subseteq F(e_0)$。所以，我们必须证明的是44.7.3的(44:E:a)、(44:E:b)。

(44:E:a)的证明：假设W中两个分配$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$满足$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$。$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$且(45:D)排除了$\vec{\beta}$是独立的。这样，$\vec{\beta}$不属于$D^*(e_0)$，从而它属于

$$W-D^*(e_0)=V。$$

进而，$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$排除了$\vec{\alpha}$也属于(解)V。这样，$\vec{\alpha}$属于　379

$$W-V=D^*(e_0)。$$

所以，$\vec{\alpha}$是独立的。

现在，(45:K)产生一个 $\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}$，它是独立的且属于 $E(e_0)$。作为一个独立的分配，按照(45:G)，$\vec{\alpha}'$ 属于[$E(e_0)$的解]V。因为 $\vec{\alpha}'$、$\vec{\beta}$ 都属于(解)V，且 $\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}$，这是一个矛盾。

(44:E:b)的证明：考虑 $F(e_0)$ 中的一个 $\vec{\beta} = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$，但它不属于 W。现在，构造 $\vec{\beta}(\varepsilon) = \{\beta_1(\varepsilon), \cdots, \beta_n(\varepsilon)\} = \{\beta_1 + \varepsilon, \cdots, \beta_n + \varepsilon\}$，$\varepsilon \geqq 0$。令 ε 从 0 开始增加，直至下述两件事情之一第一次出现：

(45:17) $\vec{\beta}(\varepsilon)$ 属于 $E(e_0)$①，

(45:18) $\vec{\beta}(\varepsilon)$ 是独立的②。

我们区别以下两种可能结果：

(45:17)首先发生，如对于 $\varepsilon = \varepsilon_1 \geqq 0$：$\vec{\beta}(\varepsilon_1)$ 属于 $E(e_0)$，但它不是独立的。

如果 $\varepsilon_1 = 0$，那么 $\vec{\beta} = \vec{\beta}(0)$ 属于 $E(e_0)$。由于 $\vec{\beta}$ 不属于 V⊆W，[$E(e_0)$的解]V 中存在一个 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$。W 中当然也存在这样的 $\vec{\alpha}$。

接下来，令 $\varepsilon_1 > 0$，且 $\vec{\beta}(\varepsilon_1)$ 属于 V。由于 $\vec{\beta}(\varepsilon_1)$ 不独立，存在着一个(非空的) $S \subseteq I$，有 $\sum_{i \text{属于} S} \beta_i(\varepsilon_1) < \mathrm{v}(S)$。另外，$\beta_i(\varepsilon_1) > \beta_i$ 总成立。所以，$\vec{\beta}(\varepsilon_1) \succ \vec{\beta}$。而且，$\vec{\beta}(\varepsilon_1)$ 属

---

① 即 $\vec{\beta}(\varepsilon)$ 的剩余等于 e_0。由于 $\vec{\beta}(0) = \vec{\beta}$ 属于 $F(e_0)$，即其剩余 $\leqq e_0$，且 $\vec{\beta}(\varepsilon)$ 随 ε 增加。——379，①

② 即对于所有 $S \subseteq I$，$\sum_{i \text{属于} S} \beta_i(\varepsilon) \geqq \mathrm{v}(S)$。每个 $\sum_{i \text{属于} S} \beta_i(\varepsilon)$ 随 ε 增加。——379，②

于 V,它当然也属于 W。

最后,假设 $\varepsilon_1 > 0$ 且 $\vec{\beta}(\varepsilon_1)$ 不属于 V。因为 $\vec{\beta}(\varepsilon_1)$ 属于 $E(e_0)$,[$E(e_0)$ 的解]V 中存在一个 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}(\varepsilon_1)$。因为 $\vec{\beta}(\varepsilon_1) > \beta_i$ 总成立,根据(45:J),$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}(\varepsilon_1)$ 意味着 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$。而且,$\vec{\alpha}$ 属于 V,它当然也属于 W。

(45:18)首先发生,或与(45:17)同时发生,如 $\varepsilon = \varepsilon_2 \geqq 0$:$\vec{\beta}(\varepsilon_2)$ 仍然属于 $F(e_0)$,而且是独立的。

如果 $\vec{\beta}(\varepsilon_2)$ 属于 $E(e_0)$,那么,根据(45:G),它属于[$E(e_0)$ 的解]V。如果 $\vec{\beta}(\varepsilon_2)$ 不属于 $E(e_0)$,那么,它属于 $D^*(e_0)$。这样,$\vec{\beta}(\varepsilon_2)$ 必定属于 W。

这排除了 $\varepsilon_2 = 0$,因为 $\vec{\beta} = \vec{\beta}(0)$ 不属于 W。所以,$\varepsilon > 0$。 380

对于 $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$,$\vec{\beta}(\varepsilon_2)$ 不是独立的,所以存在一个非空集 $S \subseteq I$,有 $\sum_{i \text{属于} S} < \mathrm{v}(S)$。从而,根据连续性,存在一个非空集 $S \subseteq I$,甚至有 $\sum_{i \text{属于} S} \leqq \mathrm{v}(S)$。另外,$\beta_i(\varepsilon_2) \leqq \mathrm{v}(S)$ 总成立,从而 $\vec{\beta}(\varepsilon_2) \succ \vec{\beta}$ 且 $\vec{\beta}(\varepsilon_2)$ 属于 W。

总结:在每一种情况下,W 中都存在一个 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$。[这个 $\vec{\alpha}$ 分别是上述 $\vec{\beta}(\varepsilon_1)$,$\vec{\beta}(\varepsilon_2)$。]所以,(44:E:b)得到满足。

现在,我们能够给出上面许诺的证明了:

(45:I)的证明:把(45:L)、(45:M)和(45:N)结合起来就是我们要的证明。

45.6 总结

45.6.1 我们已有的主要结果可以总结如下:

(45:O) 如果

(45:O:a) $e_0 < |\Gamma|_1$,

那么,$E(e_0)$、$F(e_0)$是空集,而且这个空集是它们惟一的解。

如果

(45:O:b) $-|\Gamma|_1 \leqq e_0 \leqq |\Gamma|_2$,

那么,$E(e_0)$、$F(e_0)$不是空集,它们有共同的解,且这些解不是空集。

如果

(45:O:c) $e_0 > |\Gamma|_2$,

那么,$E(e_0)$、$F(e_0)$不是空集,它们没有共同解,它们的解都不是空集。

证明:把(45:A)、(45:I)和(45:H)结合起来可直接给出证明。

这一结果弄清楚了 e_0 的两个典型的关键点 $e_0 = -|\Gamma|_1$,$|\Gamma|_2$。而且,它强化了 45.1 末尾和 45.4.2 中(45:H)之后有关这两个点的看法:即正是在这两个点处,从 44.6.1 意义上说,e_0"太小"或"太大"。

45.6.2 我们还能够证明在后面(46.5 中)有用的一些关系。

(45:P) 令 W 是 $F(e_0)$的一个非空解,即假设 $e_0 \geqq -|\Gamma|_1$。那么,

(45:P:a) $\text{Max}_{\vec{\alpha}\text{属于}W}\, e(\vec{\alpha}) = e_0$,

381 (45:P:b) $\text{Min}_{\vec{\alpha}\text{属于}W}\, e(\vec{\alpha}) = \text{Min}(e_0, |\Gamma|_2)$。①

---

① 我们的断言包括 $\text{Max}_{\vec{\alpha}\text{属于}W}$ 和 $\text{Min}_{\vec{\alpha}\text{属于}W}$ 存在的说法。——381,①

(45:P:c)　　$\mathrm{Max}_{\vec{\alpha}属于W}\, e(\vec{\alpha}) - \mathrm{Min}_{\vec{\alpha}属于W}\, e(\vec{\alpha})$

$= \mathrm{Max}(0, e_0 - |\Gamma|_2)$。①

证明:(45:P:c)得自(45:P:a)、(45:P:b),因为

$e_0 - \mathrm{Min}(e_0, |\Gamma|_2) = \mathrm{Max}(e_0 - e_0, e_0 - |\Gamma|_2)$

$= \mathrm{Max}(0, e_0 - |\Gamma|_2)$。

接下来,我们证明(45:P:a)、(45:P:b)。

令 $W = V \cup D^*(e_0)$,V 是 $E(e_0)$的一个解,它来自(45:I)。由于 $e_0 \geqq -|\Gamma|_1$,所以,根据(45:A)或(45:O),V 不是空集。正如我们所知,V 中总有 $e(\vec{\alpha}) = e_0$,且 $D^*(e_0)$中总有 $e(\vec{\alpha}) < e_0$。

现在,对于 $e_0 \leqq |\Gamma|_2$,根据(45:H),$D^*(e_0)$是空集,所以

(45:19)　　$\mathrm{Max}_{\vec{\alpha}属于W}\, e(\vec{\alpha}) = \mathrm{Max}_{\vec{\alpha}属于V}\, e(\vec{\alpha}) = e_0$,

(45:20)　　$\mathrm{Min}_{\vec{\alpha}属于W}\, e(\vec{\alpha}) = \mathrm{Min}_{\vec{\alpha}属于V}\, e(\vec{\alpha}) = e_0$。

对于 $e_0 > |\Gamma|_2$,同样根据(45:H),$D^*(e_0)$不是空集,它是满足 $e(\vec{\alpha}) < e_0$ 的 $\vec{\alpha}$ 组成的集合。所以,根据 45.2.3 中的(45:B:b),这些 $e(\vec{\alpha})$有最小值 $|\Gamma|_2$。故,在这种情况下,我们有

(45:19*)　　$\mathrm{Max}_{\vec{\alpha}属于W}\, e(\vec{\alpha}) = \mathrm{Max}_{\vec{\alpha}属于V}\, e(\vec{\alpha}) = e_0$,

(45:20*)　　$\mathrm{Min}_{\vec{\alpha}属于W}\, e(\vec{\alpha}) = \mathrm{Min}_{\vec{\alpha}属于D^*(e_0)}\, e(\vec{\alpha}) = |\Gamma|_2$。

(45:19)、(45:19*)合起来给出(45:P:a);(45:20)、(45:20*)合起来给出(45:P:b)。

---

① 口头上说:解 W 中的最大剩余是 $F(e_0)$中允许的最大剩余:e_0。解 W 中的最小剩余也是 e_0,除非 $e_0 > |\Gamma|_2$,在这种情况下,最大值只是 $|\Gamma|_2$。也就是说,最小值最大可能地接近 e_0,同时它永远不会超过 $|\Gamma|_2$。

W 中剩余的取值区间的"长度",如果存在的话,就等于 e_0 超过 $|\Gamma|_2$ 的剩余。——381,②

46. 一个可分解的博弈全部解的决定

46.1 分解的基本性质

46.1.1 让我们回到一个博弈 Γ 的分解。

令 Γ 是就 J、K($J=I-K$) 可分解的，Δ、H 分别是其 J 成分和 K 成分。

给定任一就 I 而言的扩展分配 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，我们构造其 J 成分和 K 成分 $\vec{\beta}$、$\vec{\gamma}$(对于 J 中的 i,$\beta_i=\alpha_i$;对于 K 中 i,$\gamma_i=\alpha_i$)，它们的剩余是

382

$$
(46:1)\quad \begin{cases} I\text{ 中 }\vec{\alpha}\text{ 的剩余}: e=e(\vec{\alpha})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-\mathrm{v}(I), \\ J\text{ 中 }\vec{\beta}\text{ 的剩余}: f=f(\vec{\alpha})=\sum_{i\text{属于}J}\alpha_i-\mathrm{v}(J), \\ K\text{ 中 }\vec{\gamma}\text{ 的剩余}: g=g(\vec{\alpha})=\sum_{i\text{属于}K}\alpha_i-\mathrm{v}(K)。\text{①} \end{cases}
$$

根据 42.3.2 中的(42:6:b)，或 41.3.2 有 $S=J,T=K$ 的(41:6)，

$$(46:2)\qquad \mathrm{v}(J)+\mathrm{v}(K)=\mathrm{v}(I),$$

所以，

$$(46:3)\qquad e=f+g。$$

(46:A) 我们有

① 在此之前，没有必要明确表达 $\vec{\alpha}$ 的剩余对 $\vec{\alpha}$ 的依赖性。这里，我们就 e、f 和 g 明确这一点。——382,①

(46:A:a)　　$|\Gamma|_1 = |\Delta|_1 + |\mathrm{H}|_1$,

(46:A:b)　　$|\Gamma|_2 = |\Delta|_2 + |\mathrm{H}|_2$。

(46:A:c)　　Γ 是一个非本质博弈的充分必要条件是,Δ、H 都是非本质博弈。

证明:(46:A:a)的证明:把 45.1 中的定义(45:2)依次应用于 Γ,Δ,H。

(46:4)　　$|\Gamma|_1 = \mathrm{v}(I) - \sum_{i属于I} \mathrm{v}[(i)]$,

(46:5)　　$|\Delta|_1 = \mathrm{v}(J) - \sum_{i属于J} \mathrm{v}[(i)]$,

(46:6)　　$|\mathrm{H}|_1 = \mathrm{v}(K) - \sum_{i属于K} \mathrm{v}[(i)]$。

根据(46:2),将(46:4)与(46:5)、(46:6)之和比较给出(46:A:a)。

(46:A:b)的证明:令 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$、$\vec{\gamma}$ 是上述三个扩展分配。如果

$$\sum_{i属于R} \alpha_i \geqq \mathrm{v}(R), \quad R \subseteq I,$$

那么,$\vec{\alpha}$(在 I 中)是独立的。

回忆 41.3.2 中(41:6),我们可以将其写成

(46:7)　$\sum_{i属于S} \alpha_i + \sum_{i属于T} \alpha_i \geqq \mathrm{v}(S) + \mathrm{v}(T), \quad S \subseteq J, T \subseteq K$。

如果

(46:8)　　$\sum_{i属于S} \alpha_i \geqq \mathrm{v}(S), \quad S \subseteq J$,

(46:9)　　$\sum_{i属于T} \alpha_i \geqq \mathrm{v}(T), \quad T \subseteq K$,

那么,$\vec{\beta}$、$\vec{\gamma}$(分别在 j、k 中)是独立的。 383

现在,(46:7)等价于(46:8)、(46:9)。事实上:(46:7)

得自(46:8)与(46:9)相加,而且,(46:8)是(46:7)的 $T=\ominus$ 时的特殊情况,(46:9)是(46:7)$S=\ominus$时的特殊情况。

因此,$\vec{\alpha}$ 独立的充分必要条件是,其(J、K)成分 $\vec{\beta}$、$\vec{\gamma}$ 都是独立的。由于它们的剩余 e、f、g 之间有(46:3)那样的关系,这就给出了其最小值[见(45:B:b)]

$$|\Gamma|_2=|\Delta|_2+|\mathrm{H}|_2,$$

即我们的公式(46:A:b)。

(46:A:c)的证明:将(46:A:a)或(46:A:b)与(45:E)结合起来直接给出(46:A:c)。

从 45.3.1 的意义上说,$|\Gamma|_1$、$|\Gamma|_2$ 都是博弈 Γ 的本质性的数字度量。我们的上述结果说明,对于博弈分解来说,两者是可加的。

46.1.2 我们以后的讨论要用到的另一个引理是:

(46:B) 如果(就 Γ 而言)$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$,那么 30.1.1 的对于这一占优关系来说的集合 S 能够被选为 $S\subseteq J$ 或 $S\subseteq K$ 而不失一般性。①

证明:考虑 30.1.1 的对于占优关系 $\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$ 而言的集合 S。如果偶然地 $S\subseteq J$ 或 $S\subseteq K$,那么,没有什么值得证明的东西,所以我们可以假设 $S\subseteq J$ 或 $S\subseteq K$ 都不成立。所以,$S=S_1\cup T_1$,其中 $S_1\subseteq J$,$T_1\subseteq K$,且 S_1 和 T_1 都不是空集。

对于 S 中所有的 i,我们有 $\alpha_i>\beta_i$,即对于 S_1 中所有的 i 和 T_1 中所有的 i,该不等式成立。

---

① 对 S 的这一额外约束(在这种情况下)并不改变占优的概念。——383,①

最后,

$$\sum_{i\text{属于}S}\alpha_i \leqq \mathrm{v}(S)。$$

左边显然等于 $\sum_{i\text{属于}S_1}\alpha_i + \sum_{i\text{属于}T_1}\alpha_i$;根据 41.3.2 中的(41:6),右边等于 $\mathrm{v}(S_1)+\mathrm{v}(T_1)$。因此,

$$\sum_{i\text{属于}S_1}\alpha_i + \sum_{i\text{属于}T_1}\alpha_i \leqq \mathrm{v}(S_1)+\mathrm{v}(T_1),$$

故,

$$\sum_{i\text{属于}S_1}\alpha_i \leqq \mathrm{v}(S_1), \quad \sum_{i\text{属于}T_1}\alpha_i \leqq \mathrm{v}(T_1)$$

中至少有一个成立。

所以,30.1.1 中的占优关系的三个条件中,(30:4:a)、(30:4:c)都对 S_1、T_1 成立,且(30:4:b)至少对它们中的一个成立。因此,我们可以用 $S_1(\subseteq J)$ 或 $T_1(\subseteq K)$ 中的一个取代我们原来的集合 S。

证明完成。

46.2 分解及其与解的关系:有关 $F(e_0)$ 的初步结果

46.2.1 现在,我们转向这部分理论的主要目标:可 384
分解博弈 Γ 的全部解的决定。这将在 46.6 中实现,其中包括七个引理。

我们首先给出一些纯粹描述性结果。

考虑 Γ 的对于 $F(e_0)$ 而言的解 U_I。如果 U_I 是空集,没有值得证明的东西。所以,我们假设,U_I 不是空集。根据(45:A)[或(45:O)],这等价于

$$e_0 \geqq -|\Gamma|_1 = -|\Delta|_1 - |\mathrm{H}|_1。$$

使用 46.1.1 中(46:1)的符号,我们构造

$$(46:10)\quad \begin{cases} \mathrm{Max}_{\vec{\alpha}属于U_I} f(\vec{\alpha}) = \overline{\varphi}, \\ \mathrm{Min}_{\vec{\alpha}属于U_I} f(\vec{\alpha}) = \underline{\varphi}, \\ \mathrm{Max}_{\vec{\alpha}属于U_I} g(\vec{\alpha}) = \overline{\psi}, \\ \mathrm{Min}_{\vec{\alpha}属于U_I} g(\vec{\alpha}) = \underline{\psi}。① \end{cases}$$

---

① 所有这些都能够建立，即问题中的最大值和最小值存在并得到实现。这一点能够用简单的连续性分析予以确认。

事实上，$f(\vec{\alpha}) = \sum_{i属于J} \alpha_i - v(J)$ 且 $f(\vec{\alpha}) = \sum_{i属于K} \alpha_i - v(K)$ 都是 $\vec{\alpha}$ 的连续函数，即其分量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的连续函数。因此，它们的最大值和最小值的存在性是 $\vec{\alpha}$——即集合 U_I——的值域的连续性的一个众所周知的结果。

对于有着必要数学基础——拓扑学——的读者来说，我们给出严格陈述及其证明。（基本数学结果见前面提到的卡拉西奥德利的著作，第 343 页脚注①。见第 136—140 页，尤其是定理 5）。

U_I 是 n 维线性空间中 L_n 的一个集合（见 30.1.1）。为保证 U_I 中每个连续函数有一个最大值和最小值，我们必须知道 U_I 是有界的和封闭的。

下面，我们证明：

（＊） n 人博弈 Γ 的对于 $F(e_0)[E(e_0)]$ 而言的解 U 是 L_n 中的一个有界且封闭集。

证明：有界性：如果 $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 属于 U，那么，每个 $\alpha_i \geqq v[(i)]$ 且 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - v(I) \leqq e_0$，从而 $\alpha_i \leqq v(I) + e_0 - \sum_{j \neq i} \alpha_j \leqq v(I) + e_0 - \sum_{j \neq i} v[(j)]$。所以，每个 α_i 都落入一个固定的区间

$$v[(i)] \leqq \alpha_i \leqq v(I) + e_0 - \sum_{j \neq i} v[(j)],$$

而且这些 $\vec{\alpha}$ 形成一个有界集。

封闭性：这等价于 U 的补集是一个开集。根据 30.1.1 中的(30:5:c)，U 的补集是这样一些 $\vec{\beta}$ 组成的集合，它们被 U 的任一 $\vec{\alpha}$ 占优。（注意，我们正在引入 U 的解特征！）

对于任意的 $\vec{\alpha}$，用 $D_{\vec{\alpha}}$ 记满足 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 的 $\vec{\beta}$ 组成的集合，那么，U 的补集是所有 $D_{\vec{\alpha}}$ 并集，$D_{\vec{\alpha}}$ 属于 U。

385

给定 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，$\vec{\beta}=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$，存在惟一一个 $\vec{\gamma}=\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}$，它与 $\vec{\alpha}$ 有相同 J 分量，与 $\vec{\beta}$ 有相同 K 分量：

(46:11)　　$\gamma_i=\alpha_i$，　i 属于 J，

　　　　　$\gamma_i=\beta_i$，　i 属于 k。

46.2.2　下面，我们证明：

(46:C)　　如果 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 属于 U_I，那么，(46:11)的 $\vec{\gamma}$ 属于 U_I 的充分必要条件是

(46:C:a)　　$f(\vec{\alpha})+g(\vec{\alpha})\leqq e_0$。

附带有：

(46:C:b)　　$e(\vec{\gamma})=f(\vec{\alpha})+g(\vec{\alpha})$。

证明：公式(46:C:b)：由 46.1.1 中的(46:3)，$e(\vec{\gamma})=f(\vec{\gamma})+g(\vec{\gamma})$，且显然 $f(\vec{\gamma})=f(\vec{\alpha})$，$g(\vec{\gamma})=g(\vec{\beta})$。

(46:C:a)的必要性：因为 $U_I\subseteq F(e_0)$，$e(\vec{\gamma})\leqq e_0$ 是必要的，而且，根据(46:C:b)，这与(46:C:a)一致。

(46:C:a)的充分性：$\vec{\gamma}$ 显然是一个扩展分配，$\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 也是，且(46:C:a)，(46:C:b)保证 $\vec{\gamma}$ 属于 $F(e_0)$。①

由于任意个数（甚至无穷多）的开集的并集仍然是开集，我们只须证明每个 $D_{\vec{\alpha}}$ 是开集，即：如果 $\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$，那么，对于每个充分接近 $\vec{\beta}$ 的 $\vec{\beta}'$ 来说，我们也有 $\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}'$。在占优 $\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$ 的定义中，根据 30.1.1 中的(30:4:a)(30:4:c)，$\vec{\beta}$ 只出现在(30:4:c)中。而且(30:4:c)的成立性显然不会被 β_i 一个充分小的变化破坏，因为(30:4:c)是一个 < 关系。

［注意，对于 $\vec{\alpha}$ 来说，相同的说法不成立，这是因为，$\vec{\alpha}$ 也出现在(30:4:b)中，而(30:4:b)有可能被随意小的变化破坏，因为(30:4:b)是一个 ≦ 关系。但是，对于 $\vec{\beta}$ 来说，我们需要这一性质，而对于 $\vec{\alpha}$ 来说不需要！］——384，①

① 这是(46:C:a)的惟一用途。——385，①

现在,假设 $\vec{\gamma}$ 不属于 U_I,那么,U_I 中存在一个 $\vec{\delta} \succ \vec{\gamma}$。30.1.1 的对于这一占优关系而言的集合 S 可以按照(46:B)选择,使 $S \subseteq J$ 或 $S \subseteq K$。当 $S \subseteq J$ 时,$\vec{\delta} \succ \vec{\gamma}$ 显然意味着
386 $\vec{\delta} \succ \vec{\alpha}$;当 $S \subseteq K$ 时,它意味着 $\vec{\delta} \succ \vec{\beta}$。由于 $\vec{\delta}$、$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 都属于 U_I,两种选择都不可能。

所以,$\vec{\gamma}$ 必定属于 U_I。

我们以一种显然等价的方式重述(46:C):

(46:D) 令 V_J 是 U_I 的所有 J 成分的集合,W_K 是 U_I 的所有 K 成分的集合。
那么,U_I 以如下方式得自 V_J 和 W_K:
U_I 是这样的 $\vec{\gamma}$ 组成的集合,它们在 V_J 中有一个 J 成分 $\vec{\alpha}'$ 且在 W_K 中有一个 K 成分 $\vec{\beta}'$ 使

$$e(\vec{\alpha}') + e(\vec{\beta}') \leqq e_0。\quad (46:12)$$[①]

46.3 连续性

46.3 回忆 44.3.1 的(44:B)中 U_I(对于 J、K 而言)的可分解性的定义,不难看出,它等价于:

像那里描述的那样,U_I 得自(46:D)的 V_J、W_K,但没有条件(46:12)。

因此,(46:12)可以被解释为是对 U_I 在什么程度上不

---

① 注意,这里的 $\vec{\alpha}'$、$\vec{\beta}'$ 不是(46:C)的 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$——它们是 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 的 J 成分、K 成分以及那些 $\vec{\gamma}$。$e(\vec{\alpha}')$、$e(\vec{\beta}')$ 分别是 $\vec{\alpha}'$、$\vec{\beta}'$ 在 J、K 中的剩余。但是,它们等于 $f(\vec{\alpha})$、$g(\vec{\beta})$,并等于 $f(\vec{\gamma})$、$g(\vec{\gamma})$。[所有这些都联系到(46:C)。]——386,①

可分解的描述。就 44.3.3 中关于(44:D:a)的讨论而言，这一点是有些意思的。

你甚至可以走得更远:(46:D)中(46:12)的必要性容易得到证明。[它对应着(46:C:a)，即(46:C)的证明中十分简单的最初两步。]因此，(46:D)表达了，U_I 接近于可分解，但未必可分。

结合 44.3.3 中的(44:D:b)，所有这些强烈暗示着，V_J、W_K 应该是 Δ、H 的解。然而，按照我们目前对所有概念的扩展，我们必须决定取 $F(f_0)$、$F(g_0)$ 中的哪一个，这里 f_0 是我们准备在 J 中使用的剩余，g_0 是在 K 中使用的剩余。[①] 你将看到，46.2.1 的 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 正是这里的 f_0、g_0。

事实上，我们能够证明：

(46:E)

(46:E:a)　　V_J 是 Δ 的对于 $F(\overline{\varphi})$ 而言的一个解，

(46:E:b)　　W_K 是 H 的对于 $F(\overline{\psi})$ 而言的一个解。

为了方便，我们首先给出另一个结果：

(46:F) 387

(46:F:a)　　$\overline{\varphi}+\underline{\psi}=e_0$，

(46:F:b)　　$\underline{\varphi}+\overline{\psi}=e_0$。

注意，在(46:E)和(46:F)中，通过 J、Δ、$\overline{\varphi}$、$\underline{\varphi}$ 与 K、H、$\overline{\psi}$、$\underline{\psi}$ 对换，(46:E:a)变成(46:E:b)、(46:E:b)变成(46:E:a)、(46:F:a)变成(46:F:b)、(46:F:b)变成(46:F:a)。因此，我们必须证明其中的一个，且我们选择对应于 a 的

① 读者将注意到，这类似于把 I 中给定的剩余 e_0 在 J 和 K 之间的分配问题。——386，②

结果。

(46:F:a)的证明:选择 U_I 中的一个 $\vec{\alpha}$,$f(\vec{\alpha})$取得其最大值 $\overline{\varphi}$。必然有 $e(\vec{\alpha})\leqq e_0$,而且按照定义 $g(\vec{\alpha})\geqq\underline{\psi}$,从而46.1.1中的(46:3)给出

(46:13) $$\overline{\varphi}+\underline{\psi}\leqq e_0。$$

假设(46:F:a)不正确,那么,(46:13)进一步意味着

(46:14) $$\overline{\varphi}+\underline{\psi}<e_0。$$

使用上述 U_I 中的 $\vec{\alpha}$,有 $f(\vec{\alpha})=\overline{\varphi}$,而且在 U_I 中选择一个 $\vec{\beta}$,使 $g(\vec{\beta})$取得其最小值$\underline{\psi}$。根据(46:13)或(46:14),$f(\vec{\alpha})+g(\vec{\beta})=\overline{\varphi}+\underline{\psi}\leqq e_0$。因此,(46:C)的 $\vec{\gamma}$ 也属于 U_I。再次将(46:C)与(46:14)结合,得

$$e(\vec{\gamma})=f(\vec{\alpha})+g(\vec{\beta})=\overline{\varphi}+\underline{\psi}<e_0,$$

即 $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i<\mathrm{v}(I)+e_0$。现在,定义

$$\vec{\delta}=\{\delta_1,\cdots,\delta_n\}=\{\gamma_1+\varepsilon\cdots,\gamma_n+\varepsilon\},$$

选择 $\varepsilon>0$,使 $\sum_{i=1}^{n}\delta_i=\mathrm{v}(I)+e_0$。因此,$\vec{\delta}$ 属于 $F(e_0)$。

如果 $\vec{\delta}$ 不属于 U_I,那么,U_I 中存在一个 $\vec{\eta}\succ\vec{\delta}$。根据(45:J),$\vec{\eta}\succ\vec{\gamma}$,这是不可能的,因为 $\vec{\eta}$、$\vec{\gamma}$ 都属于 U_I。所以,$\vec{\delta}$ 属于 U_I。现在,$\sum_{i属于J}\delta_i-\mathrm{v}(J)>\sum_{i属于J}\gamma_i-\mathrm{v}(J)=\sum_{i属于J}\alpha_i-\mathrm{v}(J)$,即 $f(\vec{\delta})>f(\vec{\alpha})=\overline{\varphi}$,这与 $\overline{\varphi}$ 的定义矛盾。

所以,(46:F:a)必定是正确的。证明完成。

(46:E:a)的证明:如果 $\vec{\alpha}'$ 属于 V_J,那么,它是 U_I 的一个 $\vec{\alpha}$ 的 J 成分。因此,$e(\vec{\alpha}')=f(\vec{\alpha})\leqq\overline{\varphi}$,从而 $\vec{\alpha}'$ 属于

$F(\overline{\varphi})$。所以，$V_J \subseteq F(\overline{\varphi})$。

这样，我们的任务是证明 44.7.3 的（44:E:a）和（44: 388
E:b）。

（44:E:a）的证明：假设 V_J 中有 $\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}'$。那么，$\vec{\alpha}'$、$\vec{\beta}'$ 是 U_I 中 $\vec{\gamma}$、$\vec{\delta}$ 的 J 成分。但是，$\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}'$ 显然意味着 $\vec{\gamma} \succ \vec{\delta}$，这是不可能的。

（44:E:b）的证明：考虑一个属于 $F(\overline{\varphi})$ 但不属于 V_J 的 $\vec{\alpha}'$。那么，根据定义，$e(\vec{\alpha}') \leqq \overline{\varphi}$。利用（46:F:a）的证明中提到的属于 U_I 的 $\vec{\beta}$，对于 $\vec{\beta}$，$g(\vec{\beta}) = \underline{\psi}$。令 $\vec{\beta}'$ 是这个 $\vec{\beta}$ 的 K 成分，以至 $\vec{\beta}'$ 属于 W_K 且 $e(\vec{\beta}') = g(\vec{\beta}) = \underline{\psi}$。因此，$e(\vec{\alpha}') + e(\vec{\beta}') \leqq \overline{\varphi} + \underline{\psi} = e_0$［利用（46:F:a）］。对于 I，构造 $\vec{\gamma}$，它有 J 成分、K 成分 $\vec{\alpha}'$、$\vec{\beta}'$。那么，$e(\vec{\gamma}) = e(\vec{\alpha}') + e(\vec{\beta}') \leqq e_0$，即 $\vec{\gamma}$ 属于 $F(e_0)$。

$\vec{\gamma}$ 不属于 U_I，因为其 J 成分 $\vec{\alpha}'$ 不属于 V_J。因此，［$F(e_0)$ 的解］U_I 中存在一个 $\vec{\delta} \succ \vec{\gamma}$。

令 S 是 30.1.1 的对于占优关系 $\vec{\delta} \succ \vec{\gamma}$ 而言的集合。根据（46:B），我们可以假设 $S \subseteq J$ 或 $S \subseteq K$。

首先假设 $S \subseteq K$。因为 $\vec{\gamma}$ 与 $\vec{\beta}$ 有相同 K－成分 $\vec{\beta}'$，我们能够根据 $\vec{\delta} \succ \vec{\gamma}$ 得出结论，$\vec{\delta} \succ \vec{\beta}$。由于 $\vec{\delta}$、$\vec{\beta}$ 都属于 U_I，这是不可能的。

所以，$S \subseteq J$。$\vec{\delta}'$ 的 J 成分记为 $\vec{\delta}'$。由于 $\vec{\delta}$ 属于 U_I，所以 $\vec{\delta}'$ 属于 V_J。$\vec{\gamma}$ 有 J 成分 $\vec{\alpha}'$。所以，我们能够由 $\vec{\delta} \succ \vec{\gamma}$ 得出结论，$\vec{\delta}' \succ \vec{\alpha}'$。

因此，我们有来自 V_J 的 $\vec{\delta}'$，$\vec{\delta}' \succ \vec{\alpha}'$。

46.4 连续性

46.4.1 (46:D)、(46:E)用 Δ、H 的 V_J、W_K 的恰当的解表达 Γ 的一般解 U_I。一个自然的想法是,将这一过程颠倒过来:从 V_J、W_K 出发并获得 U_I。

然而,必须牢记的一点是,(46:D)的 V_J、W_K 并不是完全随意的。如果我们在(46:D)的帮助下考虑 46.2.1的定义(46:10),那么,我们发现,它们也能够被表述为:

(46:15)
$$\begin{cases}\text{Max}_{\vec{\alpha}' \text{属于} V_J} e(\vec{\alpha}') = \overline{\varphi}, \\ \text{Min}_{\vec{\alpha}' \text{属于} V_J} e(\vec{\alpha}') = \underline{\varphi}, \\ \text{Max}_{\vec{\beta}' \text{属于} V_J} e(\vec{\beta}') = \overline{\psi}, \\ \text{Min}_{\vec{\beta}' \text{属于} V_J} e(\vec{\beta}') = \underline{\psi}。\end{cases}$$

389 而且,(46:F)表达了由 V_J、W_K 决定的 $\overline{\varphi}$、$\underline{\varphi}$、$\overline{\psi}$、$\underline{\psi}$之间的关系——它们之间的相互关系以及它们与 e_0 的关系。

46.4.2 我们将证明,这是 V_J、W_K 必须受到的惟一约束。为此,我们从 Δ、H 的任意非空解 V_J、W_K 开始(它们不必得自 Γ 的解 U_I),并给出如下断言:

(46:G) 令 V_J 是 Δ 的对于 $F(\overline{\varphi})$而言的一个非空解,W_K 是 H 的对于 $F(\overline{\psi})$而言的一个非空解。假设 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 满足(46:15),且有(46:15)的 $\underline{\varphi}$、$\underline{\psi}$,那么,

(46:16)
$$\overline{\varphi} + \underline{\psi} = \underline{\varphi} + \overline{\psi} = e_0。$$

对于满足

(46:17)
$$e(\vec{\alpha}') + e(\vec{\beta}') \leqq e_0$$

的 V_J 的任一 $\vec{\alpha}'$，W_K 的任一 $\vec{\beta}'$，构造 $\vec{\gamma}$，使其有 J 成分 $\vec{\alpha}'$ 和 K 成分 $\vec{\beta}'$。

用 U_I 记这些 $\vec{\gamma}$ 组成的集合。

以这一方式获得的 U_I 正是 Γ 的对于 $F(e_0)$ 而言的全部解。

证明：具有我们在前面指出过特征的所有 U_I 是以这一方式得到的：把(46:D)运用于 U_I，形成其 V_J、W_K。然后，我们的全部断言就包含在(46:D)、(46:E)、(46:F)和(46:15)之中。

以这一方式得到的 U_I 具有上述特征：设 U_I 是上面描述的借助 V_J、W_K 建立起来的。我们要证明的是，U_I 是 Γ 的对于 $F(e_0)$ 而言的解。

对于 U_I 的每个 $\vec{\gamma}$，我们的(46:17)给出 $e(\vec{\gamma}) = e(\vec{\alpha}') + e(\vec{\beta}') \leqq e_0$，所以 $\vec{\gamma}$ 属于 $F(e_0)$。故，$U_I \subseteq F(e_0)$。

这样，我们的任务变成了证明 44.7.3 的(44:E:a)和(44:E:b)。

(44:E:a)的证明：假设 U_I 中有 $\vec{\eta} \succ \vec{\gamma}$。令 $\vec{\alpha}'$，$\vec{\beta}'$ 是 $\vec{\gamma}$ 的 J 成分和 K 成分；$\vec{\delta}'$、$\vec{\varepsilon}'$ 是 $\vec{\eta}$ 的 J 成分和 K 成分，如上面描述的那样，$\vec{\gamma}$、$\vec{\eta}$ 来自它们的成分。令 S 是 30.1.1 的对于占优关系 $\vec{\eta} \succ \vec{\gamma}$ 而言的集合 S。根据(46:B)，我们可以假设，$S \subseteq J$ 或 $S \subseteq K$。现在，$S \subseteq J$ 会造成 $\vec{\eta} \succ \vec{\gamma}$ 意味着 $\vec{\delta}' \succ \vec{\alpha}'$，这是不可能的，因为 $\vec{\delta}'$、$\vec{\alpha}'$ 都属于 V_J。而且，$S \subseteq K$ 会导致 $\vec{\eta} \succ \vec{\gamma}$ 意味着 $\vec{\varepsilon}' \succ \vec{\beta}'$，这也是不可能的，因为 $\vec{\varepsilon}' \succ \vec{\beta}'$ 都属于 W_K。

(44:E:b)的证明：假设存在一个 $\vec{\gamma}$ 属于 $F(e_0)$ 但不属

于 U_I，以至 U_I 中不存在 $\vec{\eta}$ 使 $\vec{\eta} \succ \vec{\gamma}$。令 $\vec{\alpha}'$、$\vec{\beta}'$ 分别是 $\vec{\gamma}$ 的 J 成分和 K 成分。

390 首先，假设 $e(\vec{\alpha}') \leqq \overline{\varphi}$。那么，$\vec{\alpha}'$ 属于 $F(\overline{\varphi})$。因此，要么 $\vec{\alpha}'$ 属于 V_J，要么 V_J 中存在一个 $\vec{\delta}'$，有 $\vec{\delta}' \succ \vec{\alpha}'$。在后一种情况下，在 W_K 中选择一个 $\vec{\varepsilon}'$，$e(\vec{\varepsilon}')$ 取得其最小值 $\underline{\psi}$。用 J 成分、K 成分 $\vec{\delta}'$、$\vec{\varepsilon}'$ 构造 $\vec{\eta}$。因为 $\vec{\delta}'$、$\vec{\varepsilon}'$ 分别属于 V_J、W_K，且 $e(\vec{\delta}') + e(\vec{\varepsilon}') \leqq \overline{\varphi} + \underline{\psi} = e_0$，所以 $\vec{\eta}$ 属于 U_I。另外，由于 $\vec{\delta}' \succ \vec{\alpha}'$（它们是 J 成分和 K 成分），$\vec{\eta} \succ \vec{\gamma}$。所以，$\vec{\eta}$ 与我们最初关于 $\vec{\gamma}$ 的假设矛盾。这样，我们证明了，在这种情况下，$\vec{\alpha}'$ 必定属于 V_J。

换句话说：

(46:18) 要么 $\vec{\alpha}'$ 属于 V_J，要么 $e(\vec{\alpha}') > \overline{\varphi}$。

要看到，在第一种情况下，必然有 $e(\vec{\alpha}') \geqq \underline{\varphi}$，且在第二种情况下当然有 $e(\vec{\alpha}') > \overline{\varphi} \geqq \underline{\varphi}$。所以：

(46:19) 在任何情况下，$e(\vec{\alpha}') \geqq \underline{\varphi}$。

交换 J 和 K 使(46:18)、(46:19)变成：

(46:20) 要么 $\vec{\beta}'$ 属于 W_K，要么 $e(\vec{\beta}') > \vec{\eta}$。

(46:21) 在任何情况下，$e(\vec{\beta}') \geqq \underline{\psi}$。

现在，如果我们有(46:18)的第二种选择，那么，这与(46:21)结合起来给出

$$e(\vec{\gamma}) = e(\vec{\alpha}') + e(\vec{\beta}') > \overline{\varphi} + \underline{\psi} = e_0,$$

这是不可能的，因为 $\vec{\gamma}$ 属于 $F(e_0)$。(46:20)的第二种选择同样是不可能的。

所以，在(46:18)和(46:20)中我们都有第一种选择，即 $\vec{\alpha}'$、$\vec{\beta}'$ 属于 V_J、W_K。由于 $\vec{\gamma}$ 属于 $F(e_0)$，从而

$$e(\vec{\alpha}')+e(\vec{\beta}')=e(\vec{\gamma})\leqq e_0。$$

所以，$\vec{\gamma}$ 必定属于 U_I——与我们最初的假设矛盾。

46.5　$F(e_0)$ 中的全部结果

46.5.1　尽管有着完备性，结果(46:G)却有不令人满意的一面：作为其基础的条件(46:16)和(46:17)全然是隐性的。我们将用等价的但更为明确的条件取代之。

为此，我们从两个假定的数 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 开始。那么，从 391
(46:G)意义上说，我们能够使用 Δ、H 的分别对于 $F(\overline{\varphi})$、$F(\overline{\psi})$ 而言的什么样的解 V_J、W_K 呢？

首先，V_J、W_K 绝不能是空集。对 Δ、H 运用(45:A)或(45:O)表明，这意味着

(46:22)　　$\overline{\varphi}\geqq-|\Delta|_1, \overline{\psi}\geqq-|H|_1$。

然后，考虑(46:15)。把 45.6.1 的(45:P)运用于 Δ、H。那么，(45:P:a)保证(46:15)的两个关于最大值的方程而(45:P:b)把(46:15)中两个关于最小值的方程变成

(46:23)　$\underline{\varphi}=\mathrm{Min}(\overline{\varphi},|\Delta|_2), \underline{\psi}=\mathrm{Min}(\overline{\psi},|H|_2)$。

因此，我们可以按照(46:23)来定义 $\underline{\varphi}$、$\underline{\psi}$。

现在，我们写出(46:16)，即

(46:16)　　$\overline{\varphi}+\underline{\psi}=\underline{\varphi}+\overline{\psi}=e_0$。

(46:16)的第一个方程也可以写为

$$\overline{\varphi}-\underline{\varphi}=\overline{\psi}-\underline{\psi},$$

即，根据(46:23)

(46:24) $\quad \mathrm{Max}(0,\overline{\varphi}-|\Delta|_2)=\mathrm{Max}(0,\overline{\psi}-|\mathrm{H}|_2)$。[1]

46.5.2 现在,有两种可能的情况:

情况(a):(46:24)的两边都等于零。那么,在(46:24)两边的最大值计算中,0那一项≧另一项,即$\overline{\varphi}-|\Delta|_2\leqq 0$,$\overline{\psi}-|\mathrm{H}|_2\leqq 0$,即

(46:25) $\quad \overline{\varphi}\leqq|\Delta|_2,\overline{\psi}\leqq|\mathrm{H}|_2$。

反过来:如果(46:25)成立,那么,(46:24)成了$0=0$,即它是自动地成立的。现在,定义(46:23)变成了

(46:26) $\quad \underline{\varphi}=\overline{\varphi},\underline{\psi}=\overline{\psi}$,

且(46:16)的完全条件变成了[2]

(46:27) $\quad \overline{\varphi}+\overline{\psi}=e_0$。

(46:25)和(46:27)还给出

(46:28) $\quad e_0\leqq|\Delta|_2+|\mathrm{H}|_2=|\Gamma|_2$。

情况(b):(46:24)两边都不等于零。那么,在(46:24)的每个最大值计算中0那一项总是小于其他项,即$\overline{\varphi}-|\Delta|_2>0$,$\overline{\psi}-|\mathrm{H}|_2>0$,即

(46:29) $\quad \overline{\varphi}>|\Delta|_2,\overline{\psi}>|\mathrm{H}|_2$。[3]

392 反过来:如果(46:29)成立,那么,(46:24)变成$\overline{\varphi}-|\Delta|_2=\overline{\psi}-|\mathrm{H}|_2$,即它不是自动地满足的。我们能够把

① 见(45:P:c)及其证明。——391,①

② 其中,我们只用到第一部分以得到(46:24),我们这里的讨论的基础。——391,②

③ 注意,重要的一点是,(46:25)、(46:29)穷尽了所有可能性,即我们不可能有$\overline{\varphi}\leqq|\Delta|_2,\overline{\psi}>|\mathrm{H}|_2$,或$\overline{\varphi}>|\Delta|_2,\overline{\psi}\leqq|\mathrm{H}|_2$。当然,这是因为(46:24),它使得两边要么都等于零,要么都不等于零。

这一结果的含义将出现在接下来的引理中。——391,③

(46:24)写成

(46:30)　　$\overline{\varphi}=|\Delta|_2+w$，　$\overline{\psi}=|\mathrm{H}|_2+w$，

且(46:29)简单变成

(46:31)。　　$w>0$。

现在，定义(46:23)变成了

(46:32)　　$\underline{\varphi}=|\Delta|_2$，$\underline{\psi}=|\mathrm{H}|_2$，

而且，完全条件(46:16)[①]变成

$$|\Delta|_2+|\mathrm{H}|_2+w=e_0,$$

即

(46:33)　　$e_0=|\Gamma|_2+w$。

(46:31)和(46:33)还给出

(46:34)　　$e_0>|\Gamma|_2$。

46.5.3　总结：

(46:H)　　(46:G)的条件(46:16)、(46:17)等于说：

下述(a)、(b)两种情况之一必定成立：

情况(a)：(1)　$-|\Gamma|_1\leqq e_0\leqq|\Gamma|_2$，

(2)　$-|\Delta|_1\leqq\overline{\varphi}\leqq|\Delta|_2$，

(3)　$-|\mathrm{H}|_1\leqq\overline{\psi}\leqq|\mathrm{H}|_2$，

(4)　$\overline{\varphi}+\overline{\psi}=e_0$。

情况(b)：(1)　$e_0>|\Gamma|_2$，

(2)　$\overline{\varphi}>|\Delta|_2$，

(3)　$\overline{\psi}>|\mathrm{H}|_2$，

---

①　见第 391 页脚注②。——392，①

$$(4)\quad e_0 - |\Gamma|_2 = \overline{\varphi} - |\Delta|_2 = \overline{\psi} - |H|_2。$$①

证明情况(a)：我们知道，$e_0 \geqq -|\Gamma|_1$ 且 $\overline{\varphi} \geqq -|\Delta|_1$，$\overline{\psi} \geqq -|H|_1$。其他条件与(46:28)、(46:25)、(46:27)一致，它们包含着这一情况的完全描述。

情况(b)：这些条件与(46:34)、(46:34)、(46:29)、(46:30)、(46:33)一致，它们包含着对这一情况完全的描述[去掉服从(46:31)的 w]。

46.6 $E(e_0)$中的完全结果

393 46.6 (46:G)和(46:H)完全而明确地描述了 Γ 对 $F(e_0)$而言的解。现在，同样清楚的是，(46:H)的(a)和(b)与45.6.1中的(45:O:b)、(45:O:c)一致：的确，(46:H)的(a)、(b)的不同在于其条件(1)，它们正是(45:O:b)、(45:O:c)。

现在，我们把(46:G)、(46:H)的结果与(45:I)、(45:O)的结果结合起来。这将为我们提供这一情况的一个全面的描述：

(46:I) 如果

(46:I:a) (1) $e_0 < -|\Gamma|_1$，

那么，对于 $E(e_0)$和对于 $F(e_0)$来说，空集都是 Γ 的惟一解。

如果

① 读者应该注意的是，(a)中的(1)—(3)与(b)中的(1)—(3)较为相似，但两者中的条件(4)则完全不同。不过，所有这些都是一个一直理论(one consistent theory)的严格讨论的结果！

我们将在后面对此进行更为详细的讨论。——392，②

(46:I:b) (1) $-|\Gamma|_1 \leqq e_0 \leqq |\Gamma|_2$,

那么,对于 $E(e_0)$ 和 $F(e_0)$ 来说,Γ 有相同的解 $\overline{U}_I$。这些 $\overline{U}_I$ 恰好是以如下方式得到的集合:

选择 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$,使

(2) $-|\Delta|_1 \leqq \overline{\varphi} \leqq |\Delta|_2$,

(3) $-|H|_1 \leqq \overline{\psi} \leqq |H|_2$,

(4) $\overline{\varphi} + \overline{\psi} = e_0$。

对于 $E(\overline{\varphi})$、$E(\overline{\psi})$,分别选择 Δ、H 的解 $\overline{V}_J$、$\overline{W}_K$。

那么 $\overline{U}_I$ 是 $\overline{V}_J$ 与 $\overline{W}_K$ 的 44.7.4 意义上的合成。

如果

(46:I:c) (1) $e_0 > |\Gamma|_2$,

那么,对于 $E(e_0)$ 来说,Γ 没有相同的解 $\overline{U}_I$,对于 $F(e_0)$ 来说,没有相同的解 U_I。这些 $\overline{U}_I$ 和 U_I 是以如下方式得到的集合:选择两个数 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$,使

(2) $\overline{\varphi} > |\Delta|_2$,

(3) $\overline{\psi} > |H|_2$,

它们由下式界定:

(4) $e_0 - |\Gamma|_2 = \overline{\varphi} - |\Delta|_2 = \overline{\psi} - |H|_2$。

对于 $E(\overline{\varphi})$、$E(\overline{\psi})$,分别选择 Δ、H 的解 $\overline{V}_J$、$\overline{W}_K$。

那么,$\overline{U}_I$ 是如下集合的并集:$\overline{V}_J$ 与(K 中)满足 $e(\vec{\beta}') = |H|_2$ 的所有独立的 $\vec{\beta}'$ 组成的集 394

合的合成；（J中）满足$e(\vec{\alpha}')=|\Delta|_2$的独立$\vec{\alpha}'$组成的集合与$\overline{W}_K$的合成；（$J$中）满足$e(\vec{\alpha}')=\varphi$的独立的$\vec{\alpha}'$组成的集合与（$K$中）满足$e(\vec{\beta}')=\psi$的独立的$\vec{\beta}'$组成的集合的合成，其中$\varphi$、$\psi$满足

（5）　$|\Delta|<\varphi<|H|<\overline{\varphi}$，　$|H|_2<\psi<\overline{\psi}$，

且

φ、ψ满足

（6）　$\varphi+\psi=e_0$。

U_J得自同一过程，只需把条件（6）换成

（7）　$\varphi+\psi\leqq e_0$。

证明：（46：I：a）：这与（45：O：a）相同。

（46：I：b）：这基本上是（46：H）中情况（a）的重述，有如下改动：

第一：对于Γ、Δ、H来说，E和F的解有所变化。这通过把（45：O：b）应用于Γ、Δ、H来验证，根据（46：I：b）的（1）、（2）、（3），这样做是合理的。

第二：只要我们忽略条件（46：17），我们从$\overline{V}_J=V_J$，$\overline{W}_K=W_K$构造$\overline{U}_J=U_J$的方式就不同于（46：H）中描述的方式。要证明这一点，只需注意到，（46：17）是自动地得到满足的：$V_J=\overline{V}_J\subseteq E(\overline{\varphi})$，$W_K=\overline{W}_K\subseteq E(\overline{\psi})$，因此，对于$V_J$中的$\vec{\alpha}'$和$W_K$中的$\vec{\beta}'$来说，总有$e(\vec{\alpha}')=\overline{\varphi}$，$e(\vec{\beta}')=\overline{\psi}$，且根据（4），$e(\vec{\alpha}')+e(\vec{\beta}')=e_0$。

（46：I：c）：这基本上是（46：H）中情况（b）的重述，有如下修改：

对于 Γ,我们考虑 *E* 和 *F* 解[而不像在(46:H)中那样仅仅考虑 F 解],而且,对于 Δ、H,只使用 *E* 解[而不像(46:H)中那样还使用 *F* 解]。前者 Γ 的 $\overline{U}_I$,U_I 从后者(Δ 的 $\overline{V}_J$,H 的 $\overline{W}_K$)的方式相应地不同于(46:H)中所描述的方式。

为了消除这些差异,我们不得不做如下工作:根据(46:I:c)的(1)、(2)、(3),将(45:I)和(45:O:c)合理地运用于 Γ、Δ、H。然后,用现在定义的东西取代(46:H)中定义的东西。如果对(46:H)[目前的(46:I:c)]完成这些运算,那么,结果就是上面描述的结果。[①]

46.7　部分结果的图示

46.7　(46:I)的结果看似十分复杂,但它们实际上只不过是几个简单定性原理的严格表达。我们进行数学推导的理由在于,这些原理并非完全是显然的,而且这也是发现并证明它们的方式。另一方面,我们的结果能够用简单图示进行讨论。

我们首先给出一个较为形式化的说明。 *395*

看一下(46:I:a)—(46:I:c)这三种情况就会发现:关于(46:I:a),没有太多值得说的东西;另外两种情况,(46:I:b)和(46:I:c)有一些共同特点。事实上,在这两种情况中,我们想要的 Γ 的解 $\overline{U}_I$、U_I 是分别借助两个数 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 和 Δ、H 的特定相应解 $\overline{V}_J$、$\overline{W}_K$ 来得到的。$\overline{U}_I$、U_I 的描述中的定量成分是数 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$。正如第 386 页脚注②指出的那样,它

---

① 如果读者完成这一工作,他将看到,虽然有些烦琐,但这个变换并不困难。——394,①

们代表着 I 中给定的剩余 e_0 在 J 和 K 之间的分配一类的东西。

在(46:I:b)和(46:I:c)情况下,$\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 分别由条件(2)—(4)描述。对于(46:I:b)和(46:I:c),让我们比较这些条件。

它们有一个共同特点:它们迫使 Δ、H 的剩余 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 类似于 Γ 的剩余 e_0。

然而,它们也有着十分不同的一个方面:在(46:I:b)中,它们只对 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 施加一个等式,而在(46:I:c)中它们施加两个等式。① 当然,这些不等式可能偶尔退化为等式[见 46.8.3 中(46:J)],但一般情况是上述情况。

e_0 与 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 的关系如图 69 所示。

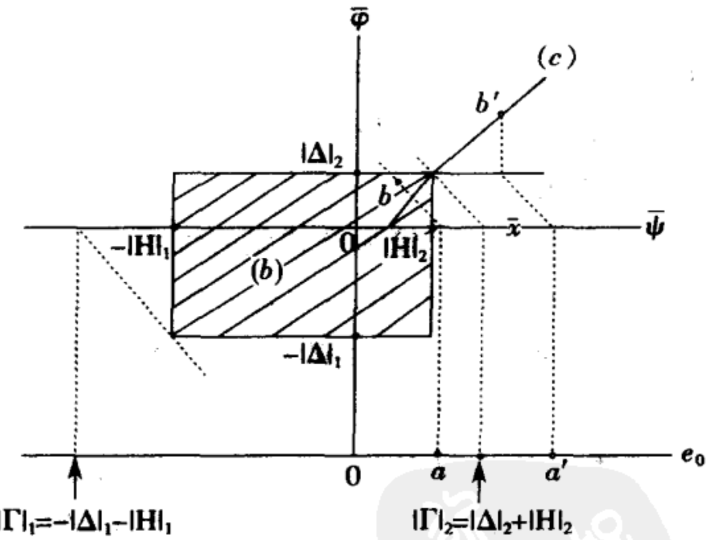

图 69

① 两种情况下(2)、(3)都是不等式。(4)在(46:I:b)中是一个等式且在(46:I:c)中是两个等式。——395,①

该图表明了$(\overline{\varphi},\overline{\psi})$平面和它下面的 e_0 线。在 e_0 线上，点 $-|\Gamma|_1$、$|\Gamma|_2$ 把这条线分成三个区域，分别对应着(46:I:a)—(46:I:c)三种情况。属于情况(46:I:b)的$(\overline{\varphi},\overline{\psi})$值域是$(\overline{\varphi},\overline{\psi})$平面中矩形区域($b$)。属于情况(46:I:c)的$(\overline{\varphi},\overline{\psi})$值域是$(\overline{\varphi},\overline{\psi})$平面中的直线($c$)。 396

任意给定两个$(\overline{\varphi},\overline{\psi})$点，沿着图中虚线走向 e_0 值，b、b'分别给出 α、α'。任意给定一个 e_0 值，相反的过程说明其所有$(\overline{\varphi},\overline{\psi})$点，因此 α 产生一个区间，而 α'产生惟一的 b'。①

46.8　解释：正常区域和各种性质的遗传性

46.8.1　我们要对图 69 做进一步评论，这有助于我们更加充分地理解(46:I)。

首先：已经多次出现过的一个迹象［最后一次是在(45:O)之后的评论］是，情况(46:I:a)和(46:I:c)——$e_0 < -|\Gamma|_1$，和 $e_0 > |\Gamma|_2$——是 44.6.1 意义上 e_0 的“太小”或“太大”值；即情况(46:I:b)，$-|\Gamma|_1 \leqq e_0 \leqq |\Gamma|_2$，从某种意义上说属于正常区域。现在，我们的图形表明，当 Γ 的剩余 e_0 落入正常区域时，那么，Δ、H 的剩余值 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 也都分别落入它们的正常区域。② 换句话说：

从 Γ 到 Δ 和 H，正常行为［(46:I:b)中剩余的位置］是可遗传的。

---

① 我们请读者验证，图 69 的几何安排的确表达了(46:I:b)、(46:I:c)的条件。——396，①

② 即 $-|\Gamma|_1 \leqq e_0 \leqq |\Gamma|_2$ 意味着 $-|\Delta|_1 \leqq \overline{\varphi} \leqq |\Delta|_2$，$-|H|_1 \leqq \overline{\psi} \leqq |H|_2$，见(46:I:b)。——396，②

第二：在情况(46:I:b)——正常区域——中，正如我们在前面一再看到过的那样，$\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 并不完全由 e_0 决定。不过，在情况(46:I:c)中，它们是完全由 e_0 决定的。如图69所示，前者区域是($\overline{\varphi}$,$\overline{\psi}$)平面中的矩形(b)，而后者只是一条直线(c)。

然而，值得注意的是，在情况(46:I:b)的两个端点——$e_0 = -|\Gamma|_1$，$|\Gamma|_2$，$\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 的取值区间变成了一个点。[1] 因此，从(46:I:b)的可变的 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 到(46:I:c)的固定的值的转变是连续的。

第三：我们的第一项说明指出，正常行为[即与(46:I:b)对应着的剩余的位置]能够由 Γ 遗传给 Δ、H。令人吃惊的是，一般来说，在剩余等于零不具有可遗传性，即一般来说，$e_0 = 0$[2] 并不意味着 $\overline{\varphi} = 0$，$\overline{\psi} = 0$。正是剩余消失使(44.7)我们目前的理论特殊化为(42.4.1的)旧理论(我们知道，它等价于30.1.1的最初理论)。我们将在最后一项说明中更为详细地研究 $e_0 = 0$ 时 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 的可变性。在此之前，我们要关注的是我们当前的理论与旧理论之间的联系。

397 第四：显然，现在的较为宽泛的理论形式是必要的，即便我们最初的兴趣只是原有的理论形式。事实上，为了找到当初意义上($e_0 = 0$)的可分解博弈 Γ 的解，我们需要更宽泛意义上($\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 不等于零)的成分 Δ、H 的解。

这使44.6.2的说明有了更为准确的含义：现在尤为清楚的是，当博弈(Δ,H)被看作非独立博弈时，从旧理论

---

① 这是46.7末尾提到的退化情况之一。——396,③

② $e_0 = 0$ 当然落入正常情况(46:I:b)：$-|\Gamma|_1 \leqq e_0 \leqq |\Gamma|_2$。——396,④

到新论理的过渡变得多么必要。我们把这一想法的严格阐述放在46.10。

46.8.2 第五：现在，我们能够证明有关44.3.2中(44:D)和44.3.3中(44:D:a)、(44:D:b)的最终说法。(46:I:b)表明，如果我们用新理论取代旧理论，那么，在情况(44:I:b)下，(44:D)是成立的。(44:I:c)表明，在情况(44:I:c)下，即便付出同样代价，(44:D)是不成立的。因此，为了保证明显成立的(44:D)，我们从旧理论过渡到新理论并引入了约束条件(44:I:b)——正常情况。

如果我们坚持按照原有理论来解释(44:D)、(44:D:a)、(44:D:b)，那么，(44:D)、(44:D:a)不成立，[①]然而，(44:D:b)的有条件说法仍然成立。[②]

46.8.3 第六：我们已经看到，一般来说，$e_0=0$并不意味着$\overline{\varphi}=0,\overline{\psi}=0$。这里，"一般来说"是什么意思呢？$\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$服从(46:I:b)的条件(2)—(4)。由于$e_0=0$，故(4)意味着$-\overline{\psi}=\overline{\varphi}$且允许我们惟一地用$\overline{\varphi}$表达余下的(2)和(3)。它们变成：

(46:35) $$\left\{\begin{matrix}-|\Delta|_1\\-|H|_2\end{matrix}\right\}\leqq\overline{\varphi}\leqq\left\{\begin{matrix}-|\Delta|_2\\-|H|_1\end{matrix}\right\}$$

现在，把(45:E)运用于Δ、H。我们有：

如果Δ、H都是本质博弈，那么，(46:35)的下限<0，

---

① 这是因为，我们可以有$e_0=0,\overline{\varphi}\neq0,\overline{\psi}\neq0$。这样，正如44.3.3中指出的那样，44.3.1的可分解性条件(44:B:a)就被破坏了。——397，①

② 这代表着$e_0=0,\overline{\varphi}=0,\overline{\psi}=0$的特殊情况。——397，②

而且上限 >0，这样 $\overline{\varphi}$ 能够真的 ≠0。如果两者之一是非本质博弈，那么，(46:35)意味着 $\overline{\varphi}=0$，从而 $\overline{\psi}=0$。

我们把这一点明确表述为：

(46:J) $e_0=0$ 意味着 $\overline{\varphi}=0$，$\overline{\psi}=0$，即 44.3.2 的(44:D)甚至在旧理论的意义上也成立，其充分必要条件是，Δ 和 H 之一是非本质博弈。

46.9 哑玩家

46.9.1 现在，我们能够解决第 340 页脚注①中描述的更窄类型的分解——给一个博弈添加"哑玩家"。

考虑玩家 $1',\cdots,k'$ 的博弈 Δ。① 通过添加一系列"哑玩家"K 使其"膨胀"，即将 Δ 与玩家 $1'',\cdots,l''$ 的一个非本质博弈 H 合成。那么，这个合成博弈是 Γ。

398 对于这些博弈，我们将使用旧的理论。根据 31.2.1 中的(31:I)，对于非本质博弈 H 来说，恰好存在一个分配，如 $\overrightarrow{\gamma_K^0}=\{\gamma_{1''}^0,\cdots,\gamma_{l''}^0\}$。② 根据 31.2.3 中的(31:O)或(31:P)，H 有惟一一个解：一个一元集($\overrightarrow{\gamma_K^0}$)。

现在，根据(46:J)和(46:I:b)，Γ 的一般解得自 Δ 的一般解与 H 的一般解的合成，而且后者是惟一的！

换句话说：

通过与 $\overrightarrow{\gamma_K^0}$ 合成，即通过添加分量 $\gamma_{1''}^0,\cdots,\gamma_{l''}^0$，把 J(即 Δ)的每个分配 $\overrightarrow{\beta}_J=\{\beta_{1'},\cdots,\beta_{k'}\}$"膨胀"为 I(即 Γ)的一个

---

① 这里，重新引入 41.3.1 中的符号是有益的。——397，③

② 请回忆 44.2 的符号。——398，①

解 $\vec{\alpha}_I:\vec{\alpha}_I=\{\beta_{1'},\cdots,\beta_{k'},\gamma^0_{1''},\cdots,\gamma^0_{r''}\}$。那么,这一"膨胀"过程——即合成——从 Δ 的一般解产生 Γ 的一般解。

这一结果能够被总结为:通过添加"哑玩家",一个博弈的"膨胀"基本上不影响其解——没有必要给每个分配添加代表"哑玩家"的分量,而且这些分量的值是显然的:每个"哑玩家"在非本质博弈 H 中本可以得到的数额,这描述了它们的相互关系。

46.9.2 最后,(46:J)说明,当且仅当合成不是上述特殊类型的合成时,旧理论才不具有新理论的简单性质,而且,正如 46.8.1 的第三项说明中指出的那样,其遗传性也消失。

46.10 博弈的嵌入

46.10.1 在 46.8.1 的第四项说明中,我们重新强调了 44.6.2 的结果,根据这些结果,当一个博弈被看作非独立博弈时,我们必须从旧理论过渡到新理论。现在,我们给出这一想法的严格表述。

这里,为了方便,我们用 Δ 记考虑中的博弈,用 J 记其玩家集合。应该理解,Δ 是一般的博弈——我们没有假设 Δ 的可分解性。

我们首先引入一些概念,把一个给定的博弈当作一个非独立的博弈来对待:这等于不加修改地将其嵌入更宽松的结构,为了方便而将其描述为另外一个博弈 Γ。相应地,我们定义:如果 Γ 是 Δ 与另一个博弈 H 的合成,[①]我们说 Δ *被嵌入* Γ,或 Γ 是 Δ 的一个*嵌入*。换句话说,Δ 被嵌

① 除了 K 和 J 不相交,博弈 H 及其玩家集合 K 是完全随意的。——398,②

入了以其作为一个成分的所有博弈。[①]

399 **46.10.2** 现在，让我们研究 Δ 的解，把 Δ 看作一个非孤立的事情。根据上面的讨论，这等于枚举 Δ 的所有嵌入博弈 Γ 的全部解，并且仅仅在 Δ 的范围内来解释它们。最后一个运算必定是取 44.7.4 意义上的 J－成分。我们从 46.8.2 中的第五项说明知道，如果我们不考虑来自正常区域范围(b)之外的解，这是惟一可行的办法。

我们也许犹豫，Γ 的解应该是旧理论意义上的解还是新理论意义上的解呢？根据 44.6.2，前者似乎有更加充分的理由：该博弈受到的外部影响已经在从 Δ 到 Γ 的过渡中受到考虑，再也没有理由跳出旧理论了。[②] 然而，事实上，我们根本不需要停留在这一点上，因为对于 Δ 来说，结果将是相同的，与我们对 Γ 使用哪一个理论无关。但是，正如我们上面讨论的那样，如果我们对 Γ 使用新理论，我们必须把自己限制于情况(46:I:b)。

因此，问题最终变成了：

(46:K) 考虑 Δ 的所有嵌入博弈 Γ 和这些 Γ 的全部解：

(*a*)从旧理论意义上说，对于 $E(0)$ 来说，

(*b*)在正常区域中，从新理论意义上说，即就(46:I:b)的任一 $E(e_0)$ 来说，

---

① 因为一个成分博弈的成分博弈是其自身[回忆其准确定义，尤其是 43.3.1 中的(43:D)]，一个嵌入的嵌入仍然是一个嵌入。换句话说：嵌入是一个具有可递性的关系，这使我们可以不考虑以其为基础的间接关系。——398，③

② 另外，第 398 页脚注③中指出的传递性表明，Γ 进一步嵌入能够直接被看作 Δ 的一个嵌入。——399，①

哪些是这些解的 J 成分？

46.10.3 答案十分简单：

(46:L)　　(46:K)中所指(Γ 解的)J 成分正是如下集合：正常区域内 Δ 的全部解，即对于(46:I:b)的 $E(\overline{\varphi})$ 而言的全部解。对于(46:K)的(a)和(b)来说，这一点都是正确的。

证明：e_0 属于情况(46:I:b)(见第 396 页脚注④)，所以(a)较(b)窄。因此，我们只须证明得自(b)的所有集合都属于上述集合之列，而且所有这些集合甚至能够借助(a)来得到。

第一个命题不过是正常区域(b)的可遗传性。

在如下条件下，第二个命题得自(46:I:b)：给定一个满足 $-|\Delta|_1 \leqq \overline{\varphi} \leqq |\Delta|_2$ 的 $\overline{\varphi}$，找一个博弈 H 和一个满足 $-|H|_1 \leqq \overline{\psi} \leqq |H|_2$ 的 $\overline{\psi}$，使 $\overline{\varphi}+\overline{\psi}=0$ 且 H 有对于 $E(\overline{\psi})$ 来说的解。现在，这样一个 H 存在，它甚至能够被当作一个三人博弈来选择。

事实上：令 H 是一个本质三人博弈，有一般的 $\gamma>0$。那么，根据 45.1 中的(45:2)，$|H|_2=\frac{1}{2}|H|_1=\frac{3}{2}\gamma$。我们已经要求 $\overline{\psi}=-\overline{\varphi}$，而且我们现在所知结果等于

$$-3\gamma \leqq \overline{\psi} \leqq \frac{3}{2}\gamma。$$

显然，通过选择充分大的 γ，这是能够得到满足的。那么，我们还需要 H 的对于 $E(\overline{\psi})$ 而言的一个解。这样一个解(对于 $-3\gamma \leqq \overline{\psi} \leqq \frac{3}{2}\gamma$)的存在性将在第 47 节中得到证明。 400

46.10.4 对于这一结果，我们要补充两点：

第一:如果我们要掌握嵌入的过程使旧理论保有遗传性,我们就必须明白:从 Δ 和 H 合成 Γ,必须使 $e_0=0$ 意味着 $\overline{\varphi}=0$(和 $\overline{\psi}=0$)。根据(46:J),这意味着 Δ、H 之一是非本质博弈。后者意味着(见上),添加到 Δ 上的只是"哑玩家"。

总之:

(46:M) 旧理论保有遗传性的充分必要条件是,最初的博弈 Δ 是非本质博弈,或嵌入运算仅限于向 Δ 添加"哑玩家"。

第二:44.6.2 中已经暗示着把外部来源当作另外一位玩家,它带来了剩余,并且为我们从旧理论向新理论的转变铺平了道路。

上述结果(44:L)证明了一个略微不同的观点:44.6.2 的外部来源是添加到 Δ 上的博弈 H——或其玩家集 K。

现在,我们已经看到,博弈 H 必须是本质博弈,只有这样我们才能得到想要的结果。另外,我们知道,一个本质博弈必须有 $n\geqq3$ 个参与者,且(44:L)的证明表明,一个适当的有 $n=3$ 个参与者的 H 的确存在。

所以,我们看到:

(46:N) 44.6.2 的外部来源能够被看作一组新的玩家——但不作为一位玩家。事实上,这个组的成员的个数的最小值是 3。

46.10.5 上面的分析证明了我们从旧理论向新理论的过渡(在正常区域之内),并且澄清了这一转变的本质。现在,我们明白了 44.3 的"常识"性预见在旧理论中不成立,但是,它恰恰在我们修改过的定义域中成立。这样,我们的理论变得更加丰富了。

44.4.3—46.10.4 的讨论的主要原理是：我们考虑的博弈最初被看作一件孤立的事情，但是，之后这一孤立性被去掉了，并且以各种可能的方式、不加修改地被嵌入到一个更大的博弈之中。在自然科学，尤其在力学中，这样的思路是常见的。第一个观点对应着所谓封闭系统分析，第二个观点对应着它们被嵌入到一个更大的、没有相互影响的封闭系统。

这一过程方法论上的重要性在当代理论物理文献中得到了各种各样的强调，尤其在量子力学结构分析中。尤其值得注意的是，它能够在我们当前的研究中有如此基本的应用。 401

46.11　正常区域的意义

46.11.1　结果(46:I:b)为正常区域内的合成博弈 Γ 的每个解——即为旧理论意义上的每个解——界定数 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$。这一点以及与解有关的 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 的性质是如此重要，需要更充分的非数学阐述。

我们正在考虑两个博弈 Δ、H，它们分别由两个不相交的玩家集合 J 和 K 参与。这些博弈的规则规定它们之间没有任何物质上的联系。不过，我们把它们看作一个博弈，当然是一个合成博弈，有两个孤立的成分 Δ、H。

现在，让我们找出这整个安排，即合成博弈 Γ 的全部解。由于我们不希望考虑 Γ 之外的任何事情，我们固守 30.1.1 和 42.4.1 的旧理论。[1] 我们已经证明，任意一个

[1] 即 $e_0=0$。——401，①

这样的解 U_I 决定一个数 $\overline{\varphi}$,[①]它有如下性质:对于 U_I 中的每个分配 $\overrightarrow{\alpha}$,Δ(即 J 中)的玩家总共得到的数额是 $\overline{\varphi}$,而且 H(即 K 中)的玩家总共得到的数额是 $-\overline{\varphi}$。因此,(撇开其他不说),嵌入 U_I 的组织原理必须规定 H 的玩家在联盟下向 Δ 的玩家转移数额 $\overline{\varphi}$。

U_I——即嵌入其中的组织原理或行为标准的其余特征是:

第一:Δ 的玩家,在他们的相互关系中,必须遵守一个稳定的行为标准,假如从其他组转移来的数额 $\overline{\varphi}$ 超出了有争议的区域。[②]

第二:H 的玩家,在他们的相互关系中,也必须遵守一个稳定的行为标准,假如向其他玩家转移的数额 $\overline{\varphi}$ 超出了有争议的区域。[③]

第三:"入市税"转移数额 $\overline{\varphi}$ 必须位于 46.8.3 的(46:35)的两个界限值之间

$$(46:35) \qquad \left\{\begin{matrix} -|\Delta|_1 \\ -|H|_2 \end{matrix}\right\} \leqq \overline{\varphi} \leqq \left\{\begin{matrix} -|\Delta|_2 \\ -|H|_1 \end{matrix}\right\}$$

46.11.2 显然,这些规则的含义是,任何一个解,即任何稳定社会秩序的基础都是一个组向另一个组的较为有限进贡。这一进贡的数额是解的组成部分。可能的数
402 额,即能够出现在解中的那些数额,由(46:35)严格决定。这个条件尤其说明:

---

① 因为 $\overline{\varphi}+\overline{\psi}=0$,我们没有引入 $\overline{\psi}=-\overline{\varphi}$。——401,②

② 即 U_I 的 J 成分 V_J 是 Δ 的就 $E(\overline{\varphi})$ 而言的解。——401,③

③ 即 U_I 的 K 成分 W_K 是 H 的对 $E(-\overline{\varphi})$ 而言的解。——401,④

第一:进贡等于 0,即不存在进贡总是可能情况之一。

第二:进贡等于 0 成为惟一可能结果的充分必要条件是,博弈 Δ、H 都是非本质博弈(见 46.8.3 的第六项说明)。

第三:在所有其他情况中,正的和负的进贡都是可能的,即 Δ 的玩家和 H 的玩家都有可能成为进贡者。

(46:35)的界限值由博弈 Δ、H 共同决定,即由两组玩家的客观物质可能性决定。[①] 这些极限表达了,每个组有一个最小值,低于这些最小值—— $-|\Delta|_1$ 和 $|H|_1$,不存在能够接受的社会组织形式;每个组也都有一个最大值,大于这个值—— $|\Delta|_2$ 和 $|H|_2$,在任何社会组织形式下,它都不可能出现。

因此,对于特定的物质背景,即一个博弈,如 Δ,两个数字 $|\Delta|_1$ 和 $|\Delta|_2$ 能够被解释为: $-|\Delta|_1$ 是任何联盟下能够忍受的最差结果, $|\Delta|_2$ 是任何联盟下的有可能为外部接受的最大要求。[②]

45.3.1—45.3.2 的结果(45:E)和(45:F)获得了一个新的意义:根据这些结果,这两个数只有当 Δ 是非本质博弈时才会同时等于 0,而且它们的比率总是位于明确的界限范围之内。

---

① 不过,位于两个界限之间的实际数额 $\overline{\varphi}$ 并不由这些客观材料决定,而是由解,即实际接受的行为标准决定。——402,①

② 需要回忆的是,所有这些都取 Δ 的握有玩家的联盟的值 $v(J)$ 为 0;也就是说,我们正在讨论的是纯粹因缺乏组内合作和不利的一般社会组织而遭受的损失,以及纯粹因外部组织的缺乏合作和有利的一般社会组织而带来的收益。——402,②

46.12 转移现象的首次出现:$n=6$

46.12 我们已经多次看到[见 46.8.3. 中的(46:J),46.11.2 中的第二和第三项说明],一个合成博弈 Γ 的理论的新的特征因素只有在 Δ 和 H 都是本质博弈时才表现出来。这时,$e_0=0$,但

$$\overline{\varphi}=-\overline{\psi}\neq 0,$$

即 46.11 意义上的非零进贡。

现在,我们知道,一个本质博弈必定有 $n\geqq 3$ 个玩家。如果这一点对于 Δ 和 H 来说都是正确的,那么,合成博弈 Γ 必定有≧6 个玩家。

正如下面的分析表明的那样,6 个实际上足够了:令 Δ、H 都是本质三人博弈,有 $\gamma=1$。那么,$|\Delta|_1=|H|_1=3$,$|\Delta|_2=|H|_2=\frac{3}{2}$。(见 46.10.3。)因此,对于 $-\frac{3}{2}\leqq\overline{\varphi}\leqq\frac{3}{2}$,$\overline{\varphi}$ 和 $\overline{\psi}=-\overline{\varphi}$ 都落在 -3 与 $\frac{3}{2}$ 之间。如我们即将在第 47 节中证明的那样,这意味着 Δ、H 的对于 $E(\overline{\varphi})$、$E(\overline{\psi})$ 而言的解 V_J、W_K 的存在性。它们的合成 U_I 是 $\overline{\varphi}$ 被给定的合成博弈 Γ 的一个解。由于 $\overline{\varphi}$ 受到的约束只是 $-\frac{3}{2}\leqq$
403
$\overline{\varphi}\leqq\frac{3}{2}$,我们能够选择它不等于零。

因此,我们证明了:

(46:O) 要观察到合成博弈($e_0=0,\overline{\varphi}=-\overline{\psi}\neq 0$,见上)理论的新的特征,玩家个数至少为 $n=6$。

我们一再表明的一个信念是，玩家个数的增加未必只带来小个数玩家时所涉及的复杂计算，它还引起本质上新的现象。当玩家个数依次增加到 2、3、4 时，我们都看到了这类现象。有趣的是，当玩家达到 6 个时，我们再次观察到这一现象。[①]

47. 新理论中的本质三人博弈

47.1　讨论的必要性

47.1　下面，我们要根据新理论讨论本质三人博弈的解。

这一讨论的必要性在于，我们已经在 46.10 和 46.12 中利用了这些解的存在性，不过，这里的讨论本身也是有意义的。按照 46.12 中引导我们得出这些解的那些说明以及它们在分解理论中的核心作用[②]，我们希望获得有关它们的结构的详细知识。另外，熟悉这些细节将带来一些有意义的其他解释。（见 47.8 和 47.9。）最后，我们将发现，在确定问题中的解时，我们使用的原理有着广泛的用途。（见 60.3.2 和 60.3.3。）

47.2　预备性分析

47.2.1　我们考虑本质三人博弈，将其记为 Γ，它有

① 当玩家个数等于 6 时，关于其他的新现象，见 53.2。——403，①

② 这只是绝对一般特征问题，我们即将有完全解！——403，②

着正规型 $\gamma=1$。因此，$|\Gamma|_1=3$，$|\Gamma|_2=\frac{3}{2}$(见 46.12)。我们希望确定这个 Γ 对于 $E(e_0)$ 而言的解。[①] 如前面指出的那样，在应用中，我们只需要正常区域 $-3\leqq e_0\leqq\frac{3}{2}$，但我们要讨论所有 e_0。

我们将用几何方法进行讨论，这一方法是第 32 节中处理旧理论时使用过的。因此，我们将在若干方面遵循第 32 节的方案。

404 特征函数与 32.1.1 中的特征函数相同：

$$(47:1)\qquad \text{当 } S \text{ 有}\begin{cases}0\\1\\2\\3\end{cases}\text{个元素时，}v(S)=\begin{cases}0\\-1\\1\\0\end{cases}。$$

一个(扩展的)分配是一个向量

$$\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\},$$

它的三个分量必须满足 44.7.2 中的(44:13)，其现在的形式是：

$$(47:2)\qquad \alpha_1\geqq-1,\quad \alpha_2\geqq-1,\quad \alpha_3\geqq-1。$$

另外，根据 44.7.2 中的(44:11*)，在 $E(e_0)$ 中，剩余必定是 e_0，且现在有：

$$(47:3)\qquad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=e_0。$$ [②]

---

① 尽管前面使用的符号是 Δ、$\overline{\varphi}$ 和 H、$\overline{\psi}(=-\overline{\varphi})$，我们写 Γ、e_0。

当然，这里的 Γ 与前面考虑的可分解的 Γ 没有任何关系。——403，③

② 读者应该把(47:1)—(47:3)与(32:1)—(32:3)进行比较，惟一不同在于(47:3)。——404，①

47.2.2　我们想用 32.1.2 的几何方法描述这些 $\vec{\alpha}$。但是，那里的方法只描述了零和三维数组。因此，我们定义

$$(47:4)\quad \alpha^1=\alpha_1-\frac{e_0}{3},\quad \alpha^2=\alpha_2-\frac{e_0}{3},\quad \alpha^3=\alpha_3-\frac{e_0}{3}。$$

那么，(47:2)、(47:3)变成

$$(47:2^*)\quad \alpha^1\geqq-\left(1+\frac{e_0}{3}\right)\alpha^2\geqq-\left(1+\frac{e_0}{3}\right)\alpha^3\geqq-\left(1+\frac{e_0}{3}\right),$$

$$(47:3^*)\quad \alpha^1+\alpha^2+\alpha^3=0。$$①

现在，32.1.2 的描述变得可用了，我们只需用 α^1、α^2、α^3 取代 α_1、α_2、α_3。有了这一保留说明，图 52 就能够被使用了。

出于这些理由，我们不仅要构造 $E(e_0)$ 的每个向量 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 的普通意义上的分量，我们还要构造其(47:4)意义上的准分量：α^1、α^2、α^3。而且，借助这些准分量，我们利用图 52 的几何图示。

这样，这个平面图形恰好表达了条件(47:3*)。因此，条件(47:2*)等价于在图 52 的平面之内对点 $\vec{\alpha}$ 施加一个约束。这个约束是以 32.1.2 中类似方式得到的：$\vec{\alpha}$ 405
必须落在三条直线 $\alpha^1=-\left(1+\frac{e_0}{3}\right)$，$\alpha^2=-\left(1+\frac{e_0}{3}\right)$，$\alpha^3=-\left(1+\frac{e_0}{3}\right)$ 形成的三角形之内。除了相差一个比例因子

---

① 将(47:2*)、(47:3*)与 32.1.1 的(32:2)、(32:3)相比，可以看出，(47:3*)与(32:3)一致，(47:2*)与(32:2)的不同仅仅在于一个比例因子 $1+\frac{e_0}{3}$。——404，②

$1+\frac{e_0}{3}$之外①，这恰好是图 53 中的情形，如图 70 所示。阴影区域是所谓的基本三角形，代表着满足（47：2*）和（47：3*）的 $\vec{\alpha}$，即 $E(e_0)$ 中的那些 $\vec{\alpha}$。

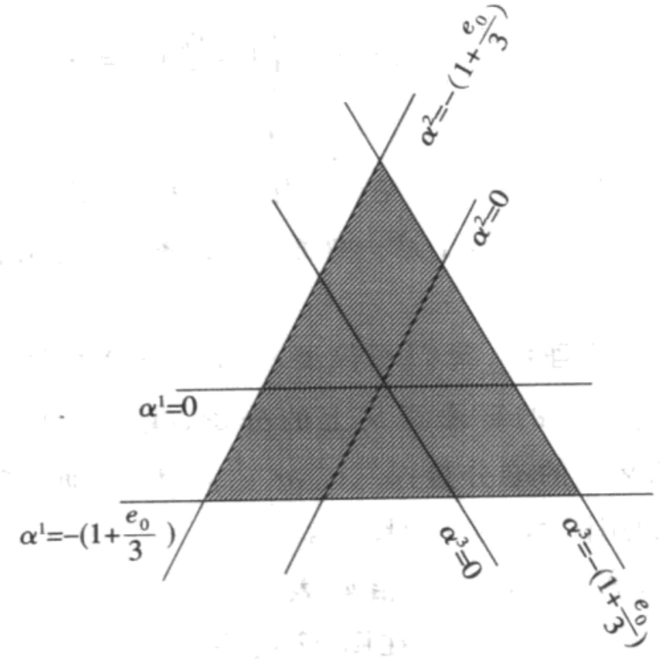

图 70

47.2.3 我们要在这个集合图示中表达占优关系。由于我们正使用着新理论，31.1 中关于 30.1.1 的对于占优关

---

① 见第 404 页脚注②。这里，我们假设 $1+\frac{e_0}{3}\geqq 0$，即

$$e_0 \geqq -3=-|\Gamma|_1。$$

如果 $1+\frac{e_0}{3}<0$，即 $e_0<-3=-|\Gamma|_1$，那么，（47：2*）和（47：3）的条件相互冲突，而且事实上（45：A）告诉我们，在这种情况下，$E(e_0)$ 是空集。——405，①

系 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 来说的集合 S——即关于其肯定必要性或肯定不必要性的分析——不再适用。因此，我们要重新讨论 S。

S 不可能是一个一元集或三元集，这一点仍然正确。在第一种情况下，$S=(i)$，根据 30.1.1，$\alpha_i \leqq \mathrm{v}[(i)]=-1$，$\alpha_i > \beta_i$，从而 $\beta_i < -1$，根据(47:2)，这与 $\beta_i \geqq -1$ 矛盾。在第二种情况下，$S=(1,2,3)$，根据 30.1.1，$\alpha_1>\beta_1$，$\alpha_2>\beta_2$，$\alpha_3>\beta_3$，从而 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3>\beta_1+\beta_2+\beta_3$，根据(47:3)，这与 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\beta_1+\beta_2+\beta_3=e_0$ 矛盾。

因此，S 必须是一个二元集，$S=(i,j)$。① 那么，占优意 406
味着 $\alpha_i+\alpha_j \leqq \mathrm{v}[(i,j)]=1$ 和 $\alpha_i>\beta_i$，$\alpha_j>\beta_j$，即

$$\alpha^i+\alpha^j \leqq 1-\frac{2e_0}{3},$$

且 $\alpha^i>\beta^i$，$\alpha^j>\beta^j$。根据(47:3*)，第一个条件可以重写为

$$\alpha^k \geqq -\left(1-\frac{2e_0}{3}\right)。$$

我们重述如下：占优

$$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$$

意味着

$$(47:5)\begin{cases}\text{要么 } \alpha^1>\beta^1,\alpha^2>\beta^2 \text{ 且 } \alpha^3 \geqq -\left(1-\dfrac{2e_0}{3}\right),\\ \text{或者 } \alpha^1>\beta^1,\alpha^3>\beta^3 \text{ 且 } \alpha^2 \geqq -\left(1-\dfrac{2e_0}{3}\right),\\ \text{或者 } \alpha^2>\beta^2,\alpha^3>\beta^3 \text{ 且 } \alpha^1 \geqq -\left(1-\dfrac{2e_0}{3}\right)。\text{②}\end{cases}$$

---

① i,j,k 是 1,2,3 的一个排列。——406，①

② 这与 32.1.3 中相应的(32:4)的不同之处仅在于每行末的额外条件。——406，②

47.3 六种情况讨论:情况(I)—(III)

47.3.1 有了这些准备,我们现在能够讨论 Γ 对于 $E(e_0)$ 而言的解 V,其中 e_0 取任意值。

我们最好分六种情况进行讨论。这些情况中,情况(I)对应着(45:O:a);情况(II)—(IV)和(V)的一个点对应着(45:O:b)(正常区域);情况(V)和(VI)(不包括前面那个点)对应着(45:O:c)。(这些都在 45.6.1 中。)

47.3.2 情况(I):$e_0 < -3$。在这种情况下,$1+\frac{e_0}{3}<0$,所以(47:2*)和(47:3*)相互冲突且 $E(e_0)$ 是空集(见第 405 页脚注①),故 V 也必定是空集。

情况(II):$e_0=-3$。在这种情况下,$1+\frac{e_0}{3}=0$,所以(47:2*)和(47:3*)意味着 $\alpha^1=\alpha^2=\alpha^3=0$,即 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\frac{e_0}{3}=-1$,

$$\vec{\alpha}=\{-1,-1,-1\}。$$

所以,$E(e_0)$ 是个一元集,且根据 31.2.3 中(31:O)的证明中给出的同样论述,V 必定 $=E(e_0)$。因此,这些条件十分类似于一个非本质博弈中枚举的那些条件。

407 情况(III):$-3<e_0\leqq 0$。在这种情况下,$1+\frac{e_0}{3}>0$,所以我们能够使用图 70。又 $1+\frac{e_0}{3}\leqq 1-\frac{2e_0}{3}$,所以 47.2.3 中(47:5)的额外条件在整个基本三角形中自动得到满足。这样,(47:5)与 32.1.3 中的(32:4)一致(见第 406 页脚注

②)。所以,把比例因子 $1+\frac{e_0}{3}$ 插入进去,那么,32.1.3—32.2.3 的全部讨论再次适用。

因此,在这种情况下,取 32.2.3 中描述的那些解,用 $1+\frac{e_0}{3}$ 乘其每一个分量并加上 $\frac{e_0}{3}$(从 α^i 过渡到 α_i),我们就简单得到了 $E(e_0)$ 的解。

47.4　情况(IV):第一部分

47.4.1　情况(IV):$0<e_0<\frac{3}{2}$。 在这种情况下,$0<1-\frac{2e_0}{3}<1+\frac{e_0}{3}$。所以,如图 71 所示,直线

$$\alpha^1=-\left(1-\frac{2e_0}{3}\right),$$

$$\alpha^2=-\left(1-\frac{2e_0}{3}\right),$$

$$\alpha^3=-\left(1-\frac{2e_0}{3}\right)$$

[它们是(47:5)的额外条件的边界]的位置服从图 70 的基本三角形。它们把基本三角形分成七个区域,其中的每一个都能够通过指出其内(47:5)意义上的二元有效集 S 而得到描述。图 71 的下方给出一个列表。现在,我们能够画出与图 54 类似的图,对于基本三角形的每个点,指明该点占优的阴影区域。[①] 图 72 中根据(47:5)完成了这一

① 不包括其边界点。——407,①

工作。我们必须分别研究图 71 中的七个区域的每一个，而且图 72 的每个阴影区域必须连续穿过整个基本三角形。

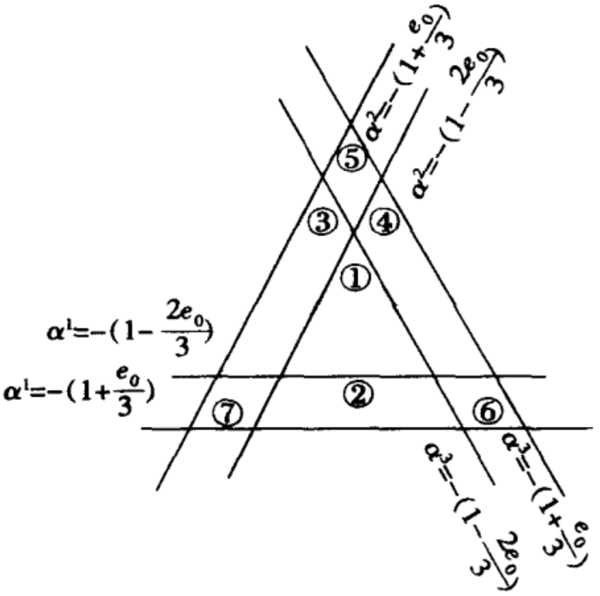

图 71

区域	有效三元集 S：		
①	(1,2)，	(1,3)，	(2,3)
②	(1,2)，	(1,3)	
③	(1,2)，		(2,3)
④		(1,3)，	(2,3)
⑤			(2,3)
⑥		(1,3)	
⑦	(1,2)		

显然，根据图 72，区域①没有被该区域之外的点占优的点。[①] 因此，当把区域①看作整个基本三角形即 $E(e_0)$

① 包括其边界点。——407，②

时，描述 $E(e_0)$ 即整个基本三角形的解 V 的 44.7.3 的条件(44:E:c)也必须对于 V 在区域①中的那部分成立。但是，除了比例因子 $1-\frac{2e_0}{3}$ 之外，区域①是一个类似于图 53 的基本三角形的三角形。① 图 54 与图 72 中区域①的比较告诉我们，占优的条件是相同的。

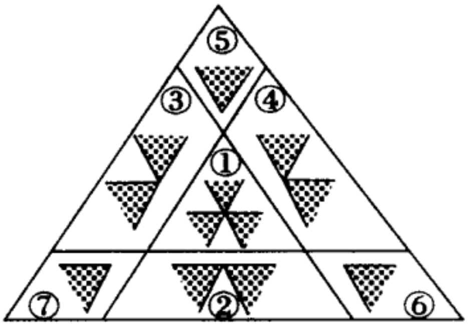

图 72

47.4.2　因此，如果把比例因子 $1-\frac{2e_0}{3}$ 插入进去， 408
32.1.3—32.2.3 的全部讨论适用于 V 在区域①中的那一部分。从而，V 落入区域①的那一部分要么是图 73 中的虚圆点组成的集合，要么是闪烁线所代表的集合(闪烁 409
线—·—·—·—可以位于上面两个虚圆点下方的任何位置)。然而，闪烁线必须是 1,2,3 的所有置换，即按照 0°、60°、120°旋转以产生所有解。[见 32.2.3，虚圆点是那里的(32:B)，而闪烁线是那里的(32:A)。]

① 注意，$1-\frac{2e_0}{3}>0$。——407，③

找出了 V 落入区域①中的部分之后，我们接着确定 V 的其余部分。由于 V 是一个解，其余部分必定位于这样一个区域，该区域不被 V 落入区域①的部分占优。图 73 与图 72 的比较告诉我们，这个不被占优的区域是如下区域：

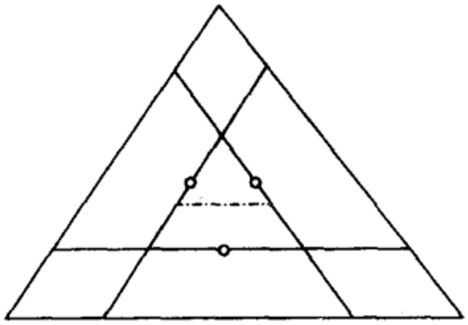

图 73

对于三个虚圆点组成的集合来说，它由图 74 中三个阴影三角形组成；对于闪烁线集合来说，它由图 75 中的三个三角形组成。[①] 图 72 清楚告诉我们，这些三角形内的任何点都不会被另一个三角形中的点占优。[②] 因此，

① 所有这些三角形的位置都在图中明确画出来了，例外情况是图 75 中下方的那个三角形。这个三角形肯定落在内三角（区域①）之外，这等价于 32.2.2 中的约束(32:8)，见那里的图 60。其相对外部（基本）三角形的位置不那么确定：它有可能缩小为一个点或完全消失。

不难看出，后一种现象被排除了，除非内三角形的大小≥外三角形的$\frac{1}{4}$，这意味着 $1-\frac{2e_0}{3} \geq \frac{1}{4}\left(1+\frac{e_0}{3}\right)$，即 $e_0 \leq 1$。我们不打算更深入讨论这个题目。——409，①

② 指图 74 或图 75——但不可能在同一说法中同时指两个图。——409，②

44.7.3 的条件(44:E:c)描述的是 V 对于 $E(e_0)$ 即整个基本三角形而言的解——而且,对于 V 落入区域①的部分,将其当作区域①[以取代整个基本三角形,即 $E(e_0)$],它也成立。这恰好表明:对于 V 落入每个阴影三角形的部分,将其看作那个三角形,(44:E:c)总是成立的。

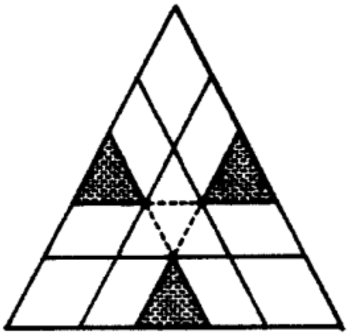

图 74

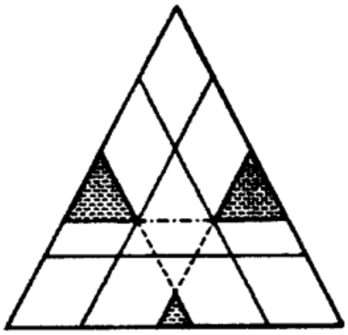

图 75

47.5 情况(IV):第二部分

47.5.1 让我们取这些三角形中的一个,记为 T。其在基本三角形中的位置[①]以及被其中一个给定的点占优的阴影区域(取自图 72)如图 76 所示。现在,我们可以集中注意力于三角形 T 和其中成立的占优概念,并针对这种情况确定(44:E:c)的解。如图 77 所示,我们重新描绘 T 及其结构,同时引入一个坐标系 x,y。 410

① 允许 0°、60°、120°旋转。对于图 75 中下面的那个三角形,顶点不在内三角形上,而是低于它(见上面脚注①),但这并不干扰我们的讨论。——409,③

请注意，顶点 O 不被 T 的点占优，因此它必定属于 V。①②

图 76

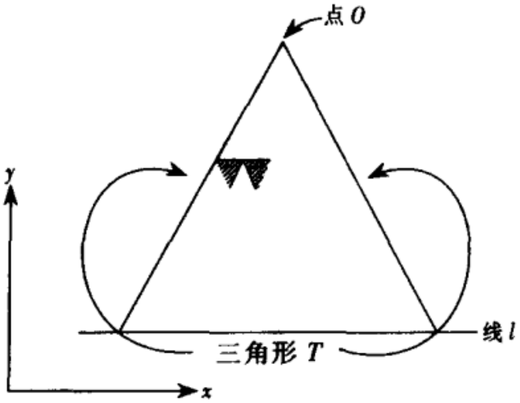

图 77

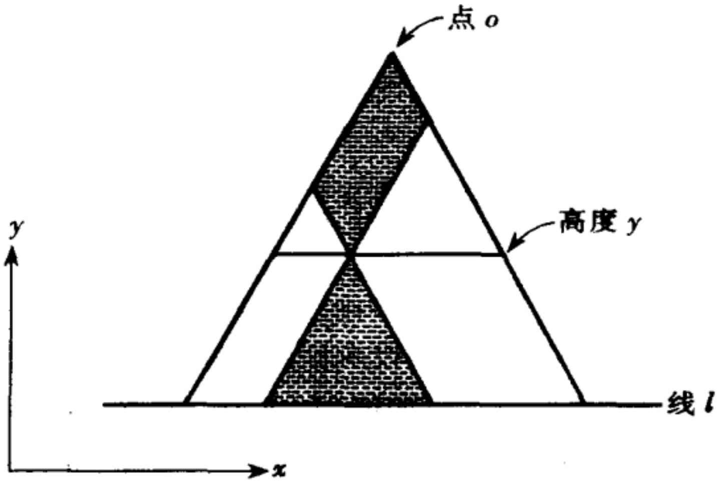

图 78

① 对于图 75 中下面的三角形之外的其他三角形（即 T），这一结论还出自另一种考虑：如图 74—75 所示，这样一个三角形的顶点位于内三角形（区域①）的边界线上，并属于我们已知为 V 落人区域①的那部分。——410，①

② 当图 75 中下面的三角形（即 T）退化为一个点（见第 409 页脚注①）O 时，那么，这决定 V 落入 T 的部分。——410，②

47.5.2 现在，考虑 V 的属于 T 的两个有不同高度 y 的点。为了上面的那个点不占优下面的那个点，后者绝对不能落入两个阴影六分周之内，下面的那个点必须在上面的那个点下方中间的那个六分周之内，反之亦然。因此，如果 V 的属于 T 的一个点给定，那么，在不同高度 y，V 的属于 T 所有点必须落入图 78 中的两个阴影六分周之一之内。

47.5.3 现在，假设 y_1 是一个高于 V 的一个点的高度。令 p 和 q 是 V 的有着高度 y_1 的两个不同的点，如图 79 所示。现在，在方块阴影三角形的内部选择一个点 r。图 79 与图 77 的比较告诉我们，点 r 占优 p 和 q。因为 p、q 都属于 V，从而 r 不能属于 V。因此，V 中必定存在一个 s，s 占优 r。图 79 与图 77 的再次比较告诉我们，占优 r 的一个点必定同时占优 p 和 q 之一。因为 s、p、q 都属于 V，所以这是一个矛盾。 411

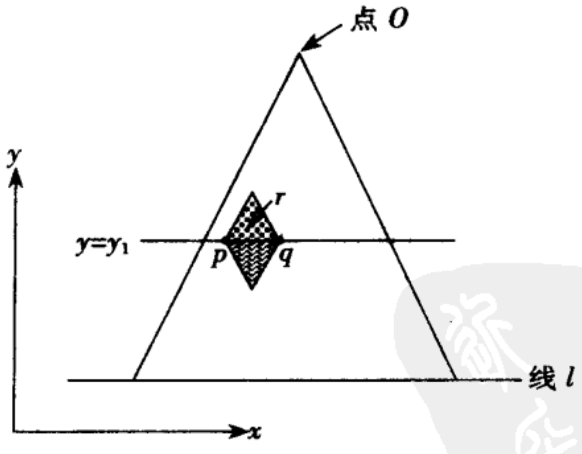

图 79

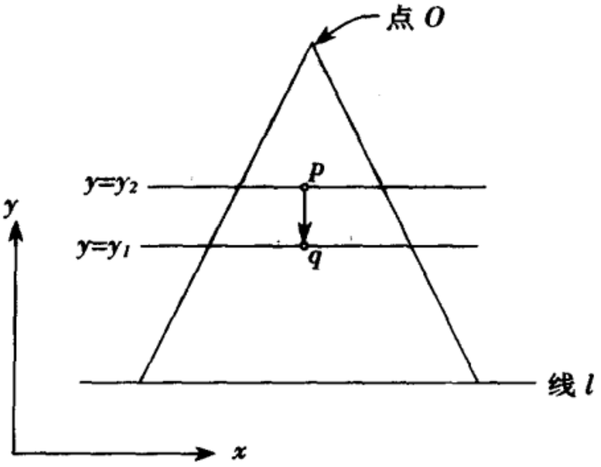

图 80

47.5.4 接下来,假设 y_1(属于 T,即位于基线 l 与顶点 O 之间)不是 V 中任何一个点的高度。必定存在 V 的这样一些点,它们的高度 $y \geqq y_1$,例如,顶点 O 就是这样一个点。选择 V 的一个点 p,有高度 $y \geqq y_1$,尽可能低,即有其 y 的最小值。[①](图 80。)用 $y = y_2$ 记这个最小值。显然,$y_1 < y_2$。按照 y_2 的定义,V 中任何一个点都不具有高度 y,$y_1 \leqq y < y_2$,而且根据上面的分析,p 是 V 的具有高度 $y = y_2$ 的惟一一个点。

现在,将 p 垂直立于 $y = y_1$ 之上,得到 q。q 不可能属于 V,因此它被 V 中的一个 s 占优。因此,这个 s 不会落在
412 q 的下面,即其高度 $y \geqq y_1$。所以,$y \geqq y_2$。图 80 与图 77 比较告诉我们,p 并不占优 q。因此,$s \neq p$,必然要求 $y \neq y_2$。所以,$y > y_2$,即 s(肯定)位于 p 之上。现在,图 80 与图 77 再次比较表明,如果位于 p 之上的一个点 s 占优 q,那么,

① 由于 V 是一个封闭集,这是可能的。见第 384 页脚注①的(*)。——411,①

它必定也占优 p。因为 s、p 都属于 V,这是矛盾的。

47.5.5 总结:(l 与 O 之间的)每个 y 都恰好是 V 的一个点的高度。如果 y 变化,那么,这个点变化,其变化范围是图 78 限定的范围,即不离开图中阴影六分周。换句话说:

(47:6) (T 中的)V 是一条从 O 到 l 的曲线,其方向偏离垂直线的程度不会超过 30°①(见图 81)。

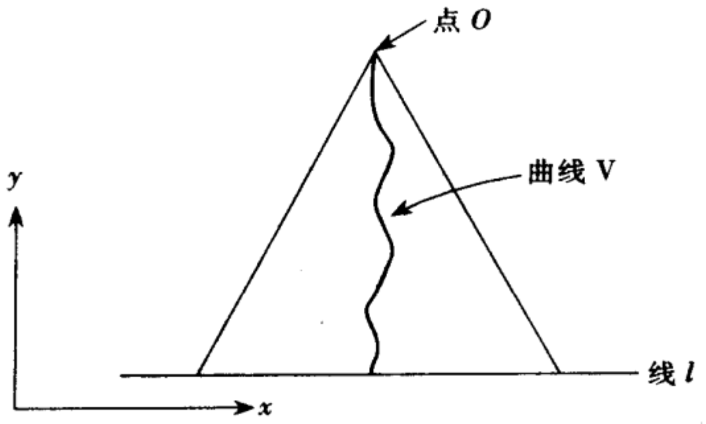

图 81

反过来,如果按照(47:6)给定一条曲线,那么,图 81 与图 77 的比较清楚告诉我们,被 V 的点占优的区域恰好清除了 V 在 T 中的补集。这样,(47:6)是 V 落入 T 的那一部分的严格决定。②

现在,我们能够获得 $E(e_0)$(即基本三角形)的一般解 V 了,我们的做法是按照图 81 向图 74 和图 75 的每个三 413

① 从而,它是连续的。——412,①

② 当 T 退化为一个点时,这一点同样正确,见第 409 页脚注①。——412,②

角形中插入曲线。结果分别见图 82 和图 83。[①]

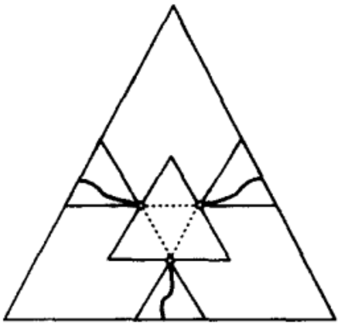

图 82

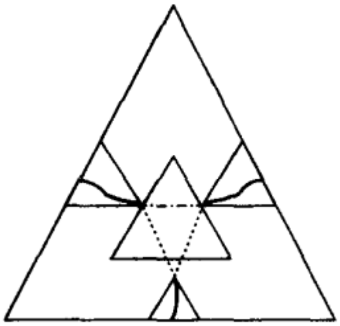

图 83

我们将会看到，这些图仍然表现出与旧理论中（见 32.2.3，说明了图 73 的内三角形）有关基本三人博弈的解的那些图有惊人的类似。新的要素是小三角形中的曲线，它们全部位于图 82 和图 83 的两个主要三角形之间的边缘地带。如图 71 所示，这个边缘地带的宽度由 e_0 衡量。[②]所以，当 e_0 趋于 0 时，我们的新解趋向于旧解。

还值得指出的一点是，这些解远比以前更加具有多变性：[在限制条件（47:6）之内]全部曲线可以自由选择。我们将在后面看到，这些曲线引导我们做出一个更有意义的解释（见 47.8）。

---

① 图 83 中下面的那个三角形有可能退化为一个点，甚至完全消失。见第 409 页脚注①。——413，①

② 外（基本）三角形的边是由 $\alpha^i = -\left(1+\frac{e_0}{3}\right)$给定的，内三角形的边则由 $\alpha^i = -\left(1-\frac{2e_0}{3}\right)$给定（见图 71）。$-\left(1+\frac{e_0}{3}\right)$与$-\left(1-\frac{2e_0}{3}\right)$之差是 e_0。——413，②

47.6　情况(V)

47.6.1　情况(V)：$\frac{3}{2} \leqq e_0 < 3$。在这种情况下，$1 - \frac{2e_0}{3} \leqq 0 < 1 + \frac{e_0}{3}$ 且 $-2\left(1 - \frac{2e_0}{3}\right) < 1 + \frac{e_0}{3}$。[1] 不难验证，这些不等式表达的是，图 71 的内三角形的方向被倒置了，但是，它仍然位于外(基本)三角形之内，如图 84 所示。后者再次被分为七个区域，其中的每一个都能够这样来描述，即说明哪些二元集是其 47.2.3 中(47:5)意义上的有效集。现在的情况与情况(Ⅳ)(即图 71)中情况的不同是区域①的表现。图 84 的下面给出了一个列表。

现在，我们能够描绘图 54 与图 72 的相似之处，对于基本三角形的每个点，指出它所占优的阴影区域。[2] 按照(47:5)，图 85 完成了这一工作。

根据图 85，区域①[3]中的任一点都不被任何点占优。[4] 因此，V 必定包含全部区域①。

---

① 后一个不等式等价于 $e_0 < 3$。——413，③

② 不包括它们的边界线。——413，④

③ 包括其边界。——413，⑤

④ 指 $E(e_0)$ 中的 $\vec{\alpha}$。不难证明，它们根本不被 $\vec{\alpha}$ 占优——根据 45.2.4 中的(45:D)它们是独立分配。

区域①内的点也不占优其他点。也就是说，它们不占优 $E(e_0)$ 中 $\vec{\alpha}$。同样，容易证明，它们根本不占优 $\vec{\alpha}$——它们是充分独立的分配，见 45.2.4 中的(45:C)。

这些说法也可以用 5.2 的定义来直接验证。——413，⑥

414

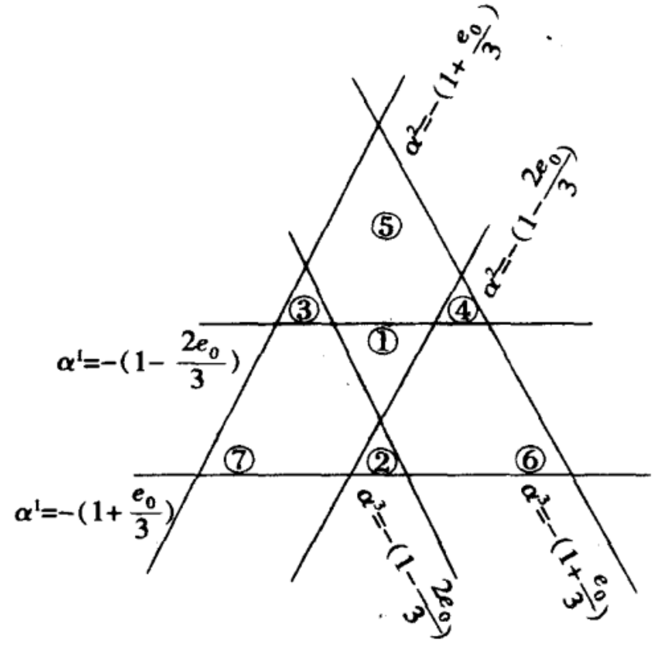

图 84

区域	有效二元集 S:		
①			
②	(1,2),	(1,3)	
③	(1,2),		(2,3)
④		(1,3)	(2,3)
⑤			(2,3)
⑥		(1,3)	
⑦	(1,2)		

415 **47.6.2** 找到了 V 的属于区域①的那一部分之后，我们接着确定 V 的其余部分。由于 V 是一个解，其其余部分位于这样一个区域之内，该区域不被 V 的已知部分占优，即不被区域①占优。图 85 告诉我们，这个不被占优的

区域恰好由②、③、④三个三角形组成。①

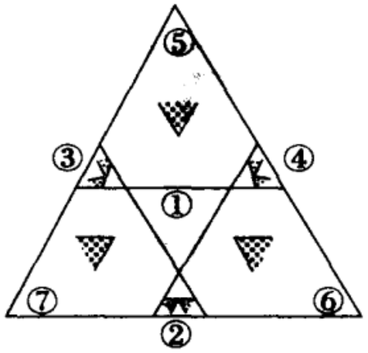

图 85

显然，根据图85，这三个三角形中的任何一点都不会被另一个三角形中的一个点占优。因此，47.4.2的论述表明，我们对V的要求必定是：44.7.3的(44:E:c)必须对V的属于这些三角形之一的那一部分成立，将其当作那一三角形[取代整个基本三角形，即$E(e_0)$]。

三角形②、③、④中的条件与图76、图77中描述的有关三角形T的条件相同。因此，47.5.1—47.5.4的全部推理可以一字不漏地照搬过来，而且，V的属于②、③、④的部分是图81中那样的曲线，它们由47.5.5中的(47:6)描述。

现在，我们能够得到V对于$E(e_0)$(即基本三角形)而言的一般解了，具体做法是在图85的②、③、④中插入上述曲线。结果见图86。有关这些解的进一步说明见47.8和47.9。

---

① 基本三角形的其余部分被属于区域①的①的边界占优。——415,①

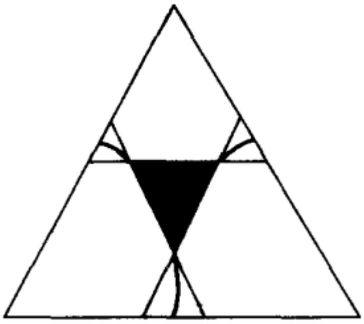

图 86

47.7 情况(VI)

47.7 $e_0 \geqq 3$。在这种情况下,$1-\frac{2e_0}{3}<0<1+\frac{e_0}{3}$且$-2\left(1-\frac{2e_0}{3}\right)\geqq 1+\frac{e_0}{3}$。[1] 不难验证,如图 87 所示,这些不等式描述的是,图 84 的内三角形仍有着相同方位,但它达到了外(基本)三角形的边界,而且有可能超出其边界。[2] 现在的情况与情况(V)(即图 84)的惟一不同是区域②、③、④的消失。图 87 下方给出了列表。

图 54、图 72 和图 85 的相似性说明占优关系包含在图 88 之中。

47.6.1 的论述能够一字不漏地照搬过来,以证明 V 包含区域①的全部。图 88 告诉我们区域①不留下不被占优基本三角形部分。[3] 因此,V 恰好等于区域①。关于这个解的更多说明见 47.9。

---

① 后一个不等式等价于 $e_0 \geqq 3$。——415,②

② $e_0>3$。——415,③

③ 基本三角形的其余部分被属于区域①的①的边界占优。——415,④

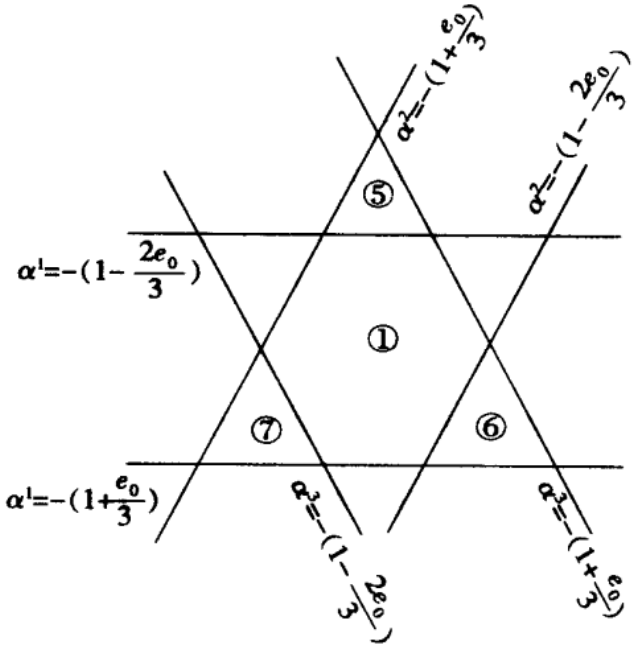

图 87

区域	有效二元集 S:
①	
⑤	(2,3)
⑥	(1,3)
⑦	(1,2)

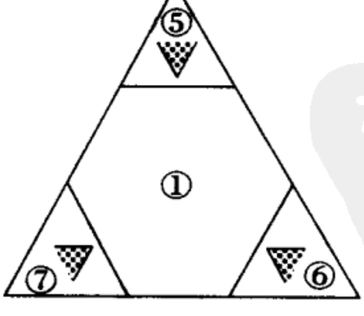

图 88

47.8 结果的解释:解中的曲线(一维部分)

416 **47.8.1** 47.2—47.7的讨论中获得的解需要一个简要的解释。惹人注目的是少数定性特征的重复出现,这在
417 描述它们结构时大有用途——一旦它们不同于我们熟悉的旧理论的本质三人博弈的解。这些特征是:一旦 $e_0>0$ (且一旦 $e_0<3$)就会出现的[在47.5.5的约束条件(47:6)范围之内具有随意性的]曲线;以及当 $e_0>\frac{3}{2}$ 时出现的二维区域。下面,我们给出它们的解释。

首先,考虑情况(IV):$0<e_0<\frac{3}{2}$(属于正常区域)。让我们讨论当前情况中这样一些解,它们扩展旧理论的无歧视解[见33.1.3和32.2.3中的(32:B)]。这样一个解见图82。

图82说明了形成旧理论中一个解的类似体的三个虚圆点。以下面的那个虚圆点为例,我们可以轻易证明

$$\alpha^1=-\left(1-\frac{2e_0}{3}\right)=-1+\frac{2e_0}{3},$$

$$\alpha^2=\alpha^3=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2e_0}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{2e_0}{3},$$

即

$$\alpha_1=-1+e_0,\quad \alpha_2=\alpha_3=\frac{1}{2}。$$

因此,这三个点表达了一种安排,其中两位玩家已经结成联盟,总的成果等于1,并且在他们之间平均分配——但是,失败的玩家并未被降低到其最小值 -1,因为他保有的

数额要超过总的剩余 e_0。

现在，从这些虚圆点出发的曲线（位于两个三角形之间的边缘地带）表达着这样的情形，在无争议地剥夺失败玩家时，总剩余 e_0 没有被剩下。通过要求这一剩余的任何部分，胜利联盟索取的数额超过 1，而它在该博弈能够实际得到的数额是 1，也就是说该联盟不再是有效的。（见图 71 和图 72 中的②、③、④）。因此，该联盟的行为——赃物在其内部的分配——不再由该博弈的现实情况——即同伙威胁——决定，而是由行为标准决定。这一点由上述曲线表达，它是解的一部分。同伙之间的可能威胁仍然在一定程度上约束着这条曲线［见 47.5.5 中的（47:6）］，但是，超过一定程度之后，它就变得十分随意了。我们必须强调，这种随意性恰恰说明了稳定的行为标准——即解——的有限多样性，意味着确定的曲线，即这种情况下的行为准则。

47.8.2　这些分析暗示着如下推测性解释：

（47:A）　在一个正的剩余出现的情况下，一个联盟有可能获得超过其有效最大值的数额，也可能获得剩余的某个比例。这种可能性主要归于行为标准而非该博弈的物质可能性。获得剩余的比例可以在 0% 至 100% 之间变化，并且有待行为标准来确定。后者将惟一地规定获得的这个比例如何在联盟成员中间分配。这一分配规则将依赖于在诸多可能的稳 418
定行为标准中选择哪一个。而且，如果后者变化，这一规则将大范围变化，尽管并非完全

不受约束。

我们已经看到，根据(47:6)，很多解中都存在着有待确定的曲线，而且，它们将来还会出现。上述解释似乎在每种情况中都适用于它们。

在一个给定的解中，剩余在胜利联盟与失败玩家之间的分配的不确定性，是特定社会秩序内部特定社会调整如何不确定的一个例子。我们的曲线还表明了这样一个细微差别，即虽然这样一个不确定的分配是被选定的，某些玩家却能够借助特定的传统相互联系着。（在67.2.3的第二项说明，67.3.3和62.6.2中我们将看到更多这类例子。）

47.9 连续性：解中的区域（二维组成部分）

47.9.1 如图83所示，47.8.2的解释(47:A)应通过将其应用于旧理论的有歧视解的扩展（见33.1.3）来检验。这会给出一些有启发性的观点，尤其关于图83中位于下方的三角形中的曲线。然而，我们不进一步阐述这一情况。

我们转向情况(V)和(VI)，尤其当$e_0 > \frac{3}{2}$的时候（这些是44.6.1和45.2意义上"太大"的剩余）。这些情况是由外部环境描述的，即它们的解包含着二维区域。实际上，有可能出现两种不同情况：

(a)情况(V)，即$\frac{3}{2} < e_0 < 3$。一个解V包含二维区域①，但除此之外还包含47.8中讨论的曲线（见图86）。

(b)情况(VI),即 $e_0 \geqq 3$。惟一的解 V 是二维区域①,别无其他(见图 88)。

二维区域在解之内的出现表明,行为标准不包含分配规则,至少在一定范围之内是这样。在情况(a)、(b)中,这些限制是具体的。在情况(a)中,47.8 的曲线出现在这些界限的外边,即行为标准仍然鼓励特定的联盟,在情况(b)中,事情就不是这样了。

47.9.2 这样,我们看到,"太大"的剩余——即来自外部来源的礼物(见 44.6.1)——的干扰作用表现在两个相继阶段:在情况(a)中,它出现在特定中心区域中,但是不排除特定传统联盟。在情况(b)中,行为标准不再允许联盟,但是它对分配有特定限制性原则。

我们看到,这些相继干扰阶段分别在 $e_0 = \frac{3}{2}$ 和 3 时 *419*
达到。[1]

对于行为标准和组织的可能性来说,这些分析相当有启发性。在理论的进一步发展中,它们也许具有指导意义。但是,读者必须小心的是,不要根据这些定量结果轻易下结论:它们适用于有一个剩余的三人博弈[2],从而证明这是它们发挥作用的最简单模型。不过,有一点更加明确了,即参与者人数的增加将带来根本性的影响。

---

① 注意,$|\Gamma|_2 = \frac{3}{2}$。——419,①

② 从而也适用于旧理论中的一个可分解六人博弈,见 46.12。——419,②

第10章 简单博弈

48. 胜利联盟、失败联盟及其出现的博弈

48.1 41.1中的第二个类:联盟的决策

420 **48.1.1** 34.1中描述的计划使我们能够把与34.2.2中立方体 Q 的八个隅角相应的博弈进一步推广。35.2.1集中讨论了隅角VIII(也是II、III、IV的代表),并且提供了一个推广的基础,引出了第9章的合成和分解理论。现在,我们转向角I(它是V、VI、VII的代表),我们将以类似方式对待它。

这一做法的一个特例已经在这个博弈中得到说明,把这个原理加以推广,我们将得到一类博弈,叫简单博弈。我们将看到,关于这类博弈的研究产生一个信息体,它有助于我们更深入理解34.1意义上的一般理论。

48.1.2 考虑35.1中讨论过的 Q 的角I。正如我们在35.1.1中讨论的那样,这个博弈有如下显著特点:玩家的目的是建立特定的联盟,这些联盟要么由玩家4和一个

盟友组成，要么由其他三位玩家组成。这些联盟中的任何一个都是真正的胜利联盟。不属于这些联盟的其他联盟都是彻底失败联盟。也就是说，数量因素，特征函数所表达的支付能够被当作次要的东西——这一博弈中的首要目标是成功建立关键联盟。

这一描述强烈暗示着，玩家号码 4 和关键联盟的具体安排属于特例，具有偶然性，一个较为一般的原理能够从这一特殊安排中提取出来。

48.1.3 在给出这一推广时，下面的结果是有用的：在上面的例子中，关键联盟——建立这些联盟是玩家的惟一目标——是

(48:1)　　(1,4),(2,4),(3,4),(1,2,3)。

现在，为了方便，我们不仅把这些联盟看作胜利联盟，而且还把它们的(真)超集也看作胜利联盟：

(48:2)　　(1,2,4),(1,3,4),(2,3,4),(1,2,3,4)。

这是因为，虽然联盟(48:2)包含那些不影响胜利与否的参与者，但是，该联盟毕竟是胜利联盟，即其对手是失败者。① 这些对手形成这样一些联盟，它们是(48:1)、(48:2)中的集合的补集，即集合 421

(48:3)　　(2,3),(1,3),(1,2),(4)

　　　　(3),(2),(1),⊖。

因此，(48:1)、(48:2)包含的是胜利联盟，而(48:3)包含的是失败联盟。

不难验证，$I=(1,2,3,4)$ 的每个子集都恰好属于这两

① 即补集是 31.1.4 意义上的平集。见 35.1.1 中的讨论。——421,①

类之一：(48:1)、(48:2)或(48:3)。[1]

48.2 胜利联盟与失败联盟

48.2.1 让我们考虑 n 个玩家组成的集合：$I=(1,\cdots,n)$。把 48.1.3 的计划加以推广，把 I 的所有子集分为 W 和 L 两类，使 W 的子集代表胜利联盟，L 的子集代表失败联盟。48.1.3 中建立起来的性质能够被描述如下：

用 $\bar{I}$ 记 I 的全体子集组成的系。[2] I 的每个子集 S 到其（在 I 中的）补集映射：

(48:4) $$S \to -S$$

显然是 $\bar{I}$ 到其自身的一个一一映射。我们有：

(48:A:a) 每个联盟要么是胜利联盟，要么是失败联盟，即 W 和 L 是 $\bar{I}$ 中的互补集合。

(48:A:b) （在 I 中）求补集的运算把一个胜利联盟变成一个失败联盟，反之亦然，即映射 (48:4) 把 W 和 L 相互映射为对方。

(48:A:c) 如果一个联盟的一部分是一个胜利联盟，那么，该联盟也是一个胜利联盟，即 W 包含其元素的所有超集。

(48:A:d) 如果一个联盟是一个失败联盟的一部分，那么，该联盟也是一个失败联盟，即 L

---

① (1,2,3,4)有 $2^4=16$ 个子集，其中 8 个属于(48:1)、(48:2)，其余 8 个属于(48:3)。——421，②

② I 有 n 个元素，所以 $\bar{I}$ 有 2^n 个元素。——421，③

包含其元素的所有子集。

48.2.2 在继续讨论胜利和失败与博弈的关系之前，我们要进一步分析条件(48:A:a)—(48:A:d)的结构。

第一个惹人注目的事实是，虽然我们需要用 W 和 L 来解释博弈，但这两个类毕竟是相互决定的。事实上，它们以如下方式相互决定：给定 W 或 L 之一，(48:A:a)以及(48:A:b)能够被用于建立另一个。也就是说，从这两个集合中的一个出发，另一个可以如下方式得到：

根据(48:A:a)：视给定的集合为一个整体并构筑其(在 I 中)的补集。

根据(48:A:b)：分别取这一给定集合的每个子集并用其(在 I 中的)补集取代它。[1] 422

还应该注意的是，如果给定的集合 W 或 L 分别具有性质(48:A:c)或(48:A:d)，那么，根据(48:A:a)或根据(48:A:b)从前者得到的另一个集合具有性质(48:A:c)或(48:A:d)。[2]

根据上面的讨论，我们能够把我们考虑中的结构建立

---

① 读者将会看到，这一条件的如下重要结构：无论求补集的运算是运用于作为一个整体的给定集合，还是分别运用于它的元素，给定的集合都必须产生相同的结果。——422，①

② 对于(48:A:a)和(48:A:b)来说，这一点的确正确，而与(48:A:a)和(48:A:b)是否产生同一集合无关。确切说：

(48:B)　　令一个集合 M 具有性质(48:A:c)[(48:A:d)]，那么，根据(48:A:a)和(48:A:b)从 M 得出的集合有性质(48:A:d)[(48:A:c)]，我们并不假设它们相同。

证明：我们必须证明的是，变换(48:A:a)和(48:A:b)把性质(48:A:c)变成性质(48:A:d)，反之亦然。

在集合 W 或 L 之上。我们必须仅仅要求变换(48:A:a)和(48:A:b)将它变换为同一个集合(W 和 L 中的另一个),而且它必须满足(48:A:c)和(48:A:d)中最贴切的一个(根据我们前面的讨论,条件(48:A:c)和(48:A:d)中的另一个则自动得到满足)。

因此,我们仅仅有关于 W 或 L 的两个条件:第一个是(48:A:a)和(48:A:b)的等价条件,第二个是(48:A:c)或(48:A:d)。

前者意味着:一个集合与其(在 I 中的)补集没有共同元素。换句话说:两个互为(I 中的)补集的集合 S 和 $-S$ 中,有且只有一个属于该集合。

总之:

集合 $W(\subseteq \bar{I})$ 由如下性质刻画:

(48:W)

(48:W:a)　　(I 中的)互为补集的 S 和 $-S$ 中有且只有一个属于 W。

(48:W:b)　　W 包含其元素的所有超集。

集合 $L(\subseteq \bar{I})$ 由如下性质描述:

显然,(48:A:c)等价于:

(48:A:c*)　　如果 S 属于 M,且 T 不属于 M,那么,$S\subseteq T$ 不可能成立。

(48:A:d)等价于:

(48:A:d*)　　如果 S 不属于 M,且 T 属于 M,那么,$S\subseteq T$ 不可能成立。

现在,变换(48:A:a)把"属于 M"和"不属于 M"相互对调。因此,它对调(48:A:c*)和(48:A:d*)。变换(48:A:b)对调 $\subseteq$ 和 $\supseteq$(这由逐个就元素 S、T 求补集来完成;另外,记号 S、T 必须对调)。因此,它也对调(48:A:c*)和(48:A:d*)。——422,②

(48:L)

(48:L:a) （I 中）互为补集的 S 和 $-S$ 中有且只有一个属于 L。

(48:L:b) L 包含其元素的所有子集。

我们重述如下： 423

如果 $W[L]$ 满足(48:W)[(48:L)]，那么，(48:A:a)和(48:A:b)给出同一个集合 $L[W]$。W 和 L 满足(48:A:a)—(48:A:d)，那么，它们分别满足(48:W)和(48:L)。

49. 简单博弈的特征描述

49.1 胜利联盟与失败联盟的一般概念

49.1.1 现在，我们分析博弈自身内部胜利联盟和失败联盟之间的联系。

给定一个 n 人博弈 Γ。在下面的分析中，我们把自己限制于 30.1.1 或 42.4.1 意义上的旧理论。因此，正如我们在 42.5.3 中指出过的那样，根据需要，我们可以假设 Γ 是一个零和博弈或常数和博弈。

除此之外，Γ 不受其他约束，尤其不要求有正规型。

49.1.2 我们首先分析失败联盟的概念。基本上重复 35.1.1 中的讨论，我们有：[①]玩家 i，当他孤身一人时，得到数额 v[(i)]。这显然是有可能发生在他身上的最糟糕

① 不同之处是，我们现在的 Γ 更为一般一些。——423，①

的结果，因为他能够无需他人帮助而防止遭受更大的损失。因此，当玩家 i 得到这一数额时，我们可以认为他彻底失败了。如果一个联盟 S 得到数额 $\sum_{i\text{属于}S}\mathrm{v}[(i)]$ 时，我们可以认为该联盟是一个失败联盟，因为这样的话，其中的每位玩家 i 必然得到数额 $\mathrm{v}[(i)]$。① 因此，失败的准则是

$$\mathrm{v}(S)=\sum_{i\text{属于}S}\mathrm{v}[(i)]。$$

用 31.1.4 的术语说，这意味着，联盟 S 是平的。（也可见第 296 页脚注③。）

这样，我们得到了全部失败联盟组成的系 L_Γ② 的一个令人满意的定义：

(49:L)　　L_Γ 是所有平集 $S(\subseteq I)$ 的集合。

现在，我们可以轻松地说什么是一个胜利联盟了。它显然是这样一个联盟，其对手是一个失败联盟，即全部胜利联盟的系 W_Γ 是：

424 (49:W)　　W_Γ 是 $-S$ 为平集的所有 $S(\subseteq I)$ 组成的集合。

在概念上应该清楚且能够借助 27.1.1—27.1.2 直接验证的一点是，集合 W_Γ，L_Γ 在策略等价下保持不变。

49.1.3　我们不能指望 W_Γ 和 L_Γ 满足 48.2.1 的（有

---

① 因为没有哪位玩家接受小于 $\mathrm{v}[(i)]$ 的数额，且联盟 S 中的玩家总共有 $\sum_{i\text{属于}S}\mathrm{v}[(i)]$，玩家 i 得到 $\mathrm{v}[(i)]$ 是分配这一结果的惟一方式。——423，②

② 为避免混淆，我们将使用记号 W_Γ、L_Γ，而不使用 48.2.2 的 W、L。两者的区别在于，48.2.2 是我们希望（用 W、L 描述的）“胜利”联盟和“失败”联盟具有的性质的假设性讨论，而我们现在正在分析的是得自一个给定的博弈 Γ 的一个给定的集合。

两种观点在 49.3.3 的(49:E)中归为一个。——423，③

关 W,L 的)(48:A:a)—(48:A:d)。具有目前的一般性的博弈未必是那里提到的简单博弈,其中所有玩家的惟一目标是形成一定的关键联盟,而且不存在其他需要一个定量描述的动机。[1] 因此,为了表达我们已知的这一性质,我们有必要做出限制。事实上,这一限制的准确描述是接下来要实现的目标。

然而,我们要首先确定(48:A:a)—(48:A:d)中有多少对于目前的一般 Γ 是成立的。我们分几个阶段回答这一问题。

(49:A)　　W_Γ、L_Γ 总满足(48:b)—(48:A:d)。

证明:(48:A:b)的证明:比较 49.1.2 中的(49:L)和(49:W)直接给出结果。[2]

(48:A:c)和(48:A:d)的证明:由于我们有(48:A:b),我们能够应用 48.2.2 中的(48:B)[3],从而,(48:A:c)和(48:A:d)中的一个意味着另一个。

但是,考虑到(49:L),(48:A:d)与 31.1.4 中的(31:D:c)一致。

因此,我们目前的 W_Γ、L_Γ 与 48.2 的结构之间的主要区别在于(48:A:a),即 W_Γ、L_Γ 是否互补。我们可以把这

---

① 我们关于四人博弈的讨论已经给出了有关这类动机的很多讨论,36.1.2 末尾提供了一个很好的例子。事实上,这是常有的情况,我们目前正要讨论的一类博弈从一定意义上说是一种极端情况,见 49.3.3 的总结。——424,①

② 实际上,"胜利"的概念借助求补集的运算建立在"失败"的概念之上。——424,②

③ 这说明了为什么我们在 48.2.1 中把(48:A:a)与(48:A:b)分开:现在,我们有(48:A:b),但没有(48:A:a)。——424,③

个断言分为两个部分：

(49:1)

(49:1:a)　　$W_\Gamma \cap L_\Gamma = \ominus$，[1]

(49:1:b)　　$W_\Gamma \cup L_\Gamma = \bar{I}$。[2]

(49:1:a)使我们回到如下熟知概念：

(49:B)

(49:B:a)　　(49:1:a)成立的充分必要条件是，Γ 是本质博弈。

(49:B:b)　　如果 Γ 是非本质博弈，那么，$W_\Gamma = L_\Gamma = \bar{I}$。[3]

425 证明：(49:B:a)的证明：(49:1:a)的否定意味着存在一个 S，使 S 和 $-S$ 都是平集。根据 31.1.4 中的(31:E:b)，这等于非本质性。

(49:B:b)的证明：$W_\Gamma = L_\Gamma = \bar{I}$ 意味着 $\bar{I}$ 中每一个 S 都是平集。根据 31.1.4 中(31:E:c)，这等于非本质性。

在过渡到(49:1:b)之前，我们首先要注意到的是，W_Γ、L_Γ 具有(48:A:a)—(48:A:d)中没有出现的一个性质。

(49:C)　　L_Γ 包含着空集和所有一元集。[4]

证明：这与 31.1.4 中的(31:D:a)和(31:D:b)相同。

---

① 你也许觉得别扭，这一断言——一个联盟不可能同时是胜利的和失败的——必须被分开陈述。这一条件的含义将在(49:B)和脚注⑥中表现出来。——424，④

② 这是说，每个联盟——即 I 的每个子集——要么肯定是胜利的，要么肯定是失败的。这个想法当然是我们希望将 Γ 特殊化所依据的基础。——424，⑤

③ 因此，当一个博弈是非本质博弈时，一个联盟能够同时是胜利联盟和失败联盟，这显然是因为此时两种陈述都是没有意义的。——424，⑥

④ 显然，根据我们关于博弈的整个分析，一位玩家的一个联盟总被看作失败的——因为这位玩家没有成功地找到一个结盟同伙。——425，①

(49:C)实际上是一个新的条件,即它不是(48:A:a)—(48:A:d)的一个结果;我们将在 49.2 中验证这一点。因此,我们在 48.2 中给出的肤浅讨论忽视了 W_r、L_r 的这一必要特征。因此,我们必须确保现在的条件包含一切。也就是说,条件(48:A:b)—(48:A:d)和(49:C)与有关非本质性的结果(49:B)合起来完全描述了 W_r、L_r。这将在 49.3 中得到证明。

49.2　一元集的特殊作用

49.2.1　我们从上面提到的一个例子开始:两个系 W、L,它们满足(48:A:a)—(48:A:d)[①],但不满足(49:C)。实际上,我们能够确定所有这样的配对。

(49:D)　W、L 满足(48:A:a)—(48:A:d),但不满足(49:C),当且仅当它们有下述形式:W 是所有包含 i_0 的 S 的集合,L 是所有不包含 i_0 的 S 的集合,其中 i_0 是随意选定的一位玩家。

证明:充分性:我们可以直接验证,W、L 有满足(48:A:a)—(48:A:d)的形式。因为一元集(i_0)属于 W,而不属于 L,(49:C)得不到满足。

必要性:假设 W、L 满足(48:A:a)—(48:A:d),但不满足(49:C)。令(i_0)是一个一元集,它不属于 L。[②] 那么,(i_0)属于 W。

---

① 最初,我们只提到(48:A:b)—(48:A:d),但上面的分析毫不费力地加强了条件。——425,②

② 如果空集不属于 L,那么,根据(48:A:d),没有能够属于 L 的集合。所以,任何(i_0)都将属于 W。——425,③

每个包含 i_0 的 S 有 $S\supseteq(i_0)$，因此，根据(48:A:c)，它属于 W。如果 S 不包含 i_0，那么，$-S$ 包含它。因此，按照上面的分析，$-S$ 属于 W，而且，根据(48:A:b)，S 属于 L。

最后，根据(48:A:a)，W、L 不相交，因此，W 恰好是包含 i_0 的 S 组成的集合，且 L 恰好是不包含 i_0 的 S 组成的集合。

49.2.2 我们要对这一结果做简单评述。

426 (49:D)中的 W、L 不可能是任何博弈的 W_Γ、L_Γ，因为它们违背了(49:C)。这也许有点奇怪，因为(49:D)看似会传递一个十分清楚的"胜利"和"失败"的概念，由其 W、L 来描述。事实上，它们描述的是这样一种情况，其中如果一个联盟包含 i_0，该联盟胜利，如果该联盟不包含 i_0，该联盟就失败。为什么无法构造满足这一规定的博弈呢?

理由是，在上述条件下，"胜利"完全不是建立联盟的问题：①不需要任何人的帮助，玩家 i_0 是"胜利的"。更为糟糕的是，在我们的术语中，i_0 的这一地位不是胜利——它不是任何策略活动②的结果，而是博弈规则赋予它的一个固定地位。③ 其中联盟不带来任何优势的博弈是非本质博弈④，即使其中的玩家 i_0 应该有相当大的固定优势。

---

① 35.1.4 中就一种特殊情况给出了等价分析。——426,①

② 我们总是将此看作建立适当的联盟的活动。——426,②

③ 见 22.3.4 中三人博弈中的基本值 a'、b'、c' 的处理。有关策略等价的全部讨论遵循着同一种精神(见 27.1.1)：这类优势能够通过策略等价变换得以消除，而真正得自建立联盟的优势却不能被消除。——426,③

④ 因此，其 W_Γ、L_Γ 不是(49:D)中描述的 W_Γ、L_Γ，而是(49:B:b)的 W_Γ、L_Γ。——426,④

读者当然明白,所有这些只是对我们在前面[在(49:C)和(49:D)中]严格建立起来结果的补充说明。

49.3 实际博弈的 W、L 的特征描述

49.3.1 下面,我们转向 49.1.3 末尾提到的第二个题目。给定两个系 W、$L(\subseteq \bar{I})$,它们满足条件(48:A:b)—(48:A:d)和(49:C)以及(49:1:a)。[1] 我们将用 $W_\Gamma = W$, $L_\Gamma = L$ 构造一个本质博弈 Γ。为此,我们把 Γ 正规化,使 $\gamma = 1$。

L_Γ 中的集合 S 的特征是,它们是平集,即 $v(S) = -p$,其中 p 是 S 的元素个数。[2] W_Γ 中的集合 S 的特征是,根据上述分析,$-S$ 属于 L_Γ,即 $v(-S) = -(n-p)$。现在,$v(-S) = -v(S)$,从而,我们可以将其写成 $v(S) = n - p$。

这样,我们证明了:

我们希望有的关系 $W_\Gamma = W$, $L_\Gamma = L$ 等价于:

(49:2)　对于一个 q-元集合 S,($q = 0, 1, \cdots, n-1, n$)

(49:2:a)　$v(S) = n - q$

的充分必要条件是 S 属于 W,而且

(49:2:b)　$v(S) = -q$

的充分必要条件是 S 属于 L。

因此,我们的任务是用一个满足(49:2)的特征函数 427
$v(S)$ 构造一个(正规化的,$\gamma = 1$ 的)博弈 Γ。

---

① 我们要求(49:1:a),是因为我们的主要目标是本质博弈[见(49:B)]。因此,如即将(49:E)中给出的那样,我们将使我们的分析详尽无遗。——426,⑤

② 请回忆,所有 $v[(i)] = -\gamma = -1$。——426,⑥

49.3.2 (49:2)确定了 W 和 L 的 $\mathrm{v}(S)$，因此，我们只需就既不属于 W、也不属于 L 的那些 S 定义 $\mathrm{v}(S)$。如果既不属于 W，也不属于 L，那么，我们令 $\mathrm{v}(S)=0$。相应地，我们定义：

$$\mathrm{v}(S)=\begin{cases} n-q, S\ \text{属于}\ W \\ -q, S\ \text{属于}\ L \\ 0, \text{其他情况}^{①} \end{cases} S\ \text{有}\ q\ \text{个元素}, q=0,1,\cdots,n-1,n。$$

我们首先证明，$\mathrm{v}(S)$ 是一个特征函数，即它满足 25.3.1中的(25:3:a)—(25:3:c)。我们证明这些条件 25.4.2 中的等价形式(25:A)：

有 = 的 $p=1$ 情况：这是 $\mathrm{v}(I)=0$，因为 I 属于 W，根据(48:A:b)和(49:C)，$\ominus=-I$ 属于 L。

有 = 的 $p=2$ 情况：这是 $\mathrm{v}(S_1)+\mathrm{v}(S_2)=0$，其中 S_1、S_2 互为补集。如果 S_1、S_2 都不属于 W、L，那么，$\mathrm{v}(S_1)=\mathrm{v}(S_2)=0$。如果 S_1、S_2 之一属于 W 或 L，那么，根据(48:A:b)，另一个属于 L 或 W。根据对称性，假设 S_1 属于 L，S_2 属于 W。令 S_1 有 q 个元素，从而 S_2 有 $n-q$ 个元素，那么，$\mathrm{v}(S_1)=-q$，$\mathrm{v}(S_2)=q$。

所以，我们总有 $\mathrm{v}(S_1)+\mathrm{v}(S_2)=0$。

有 ≦ 的 $p=3$ 情况：这是 $\mathrm{v}(S_1)+\mathrm{v}(S_2)+\mathrm{v}(S_3)\leqq 0$，其中 S_1、S_2、S_3 两两不相交，并集为 I。如果 S_1、S_2、S_3 都不属于 W，那么，$\mathrm{v}(S_1)$，$\mathrm{v}(S_2)$，$\mathrm{v}(S_3)\leqq 0$。② 如果 S_1、S_2、S_3 之一属于 W，那么，我们可以根据对称性假设它是 S_3。因此，由

① 根据(49:1:a)，前两项规定并不冲突。——427，①

② 显然，如果 S 不属于 W，那么，$\mathrm{v}(S)\leqq 0$。——427，②

(48:A:b), $-S_3=S_1\cup S_2$ 属于 L,从而根据(48:A:d),S_1、S_2 属于 L。令 S_1 有 q_1 个元素,S_2 有 q_2 个元素,那么,S_3 有 $n-q_1-q_2$ 个元素。这样,$v(S_1)=-q_1$,$v(S_2)=-q_2$,$v(S_3)=q_1+q_2$。

所以,我们总有 $v(S_1)+v(S_2)+v(S_3)\leqq 0$。

49.3.3 我们证明了 $v(S)$ 的确是某个博弈 Γ 的特征函数。接下来,我们要证明如下断言:

$v(S)$(即 Γ)是正规的且 $\gamma=1$:事实上,根据(49:C),所有 $v[(i)]=-1$。

$v(S)$ 满足(49:2):根据(48:A:b)和 $v(-S)=-v(S)$,当我们交换 S 和 $-S$ 时,(49:2)的两部分一个变成另一个。因此,我们只考虑第二部分。

如果 S 属于 L,那么,显然 $v(S)=-q$。如果 S 不属于 L,那么,$v(S)=-q$ 就要求 $0=-q$①,或 $q=0$。但是,这意味着,S 是空集,与(49:C)矛盾。

所以,博弈 Γ 具有我们希望的所有性质。

现在,我们能够证明下述详尽无遗的陈述:

(49:E) 两个给定的系 W、$L(\subseteq \bar{I})$ 是一个合适的博弈 Γ 的 W_Γ、L_Γ 的充分必要条件是:

非本质的 Γ:$W=L=\bar{I}$。

本质的 Γ:(48:A:b)—(48:A:d)、(49:C)和(49:1:a)。

证明:非本质的 Γ:这是(49:B:b)的直接结果。 428

本质的 Γ:必要性是在(49:A)、(49:B)和(49:C)中

① 因为 $n-q\neq -q$,S 不属于 W,从而 $v(S)=0$。——427,③

证明的。充分性是我们已经建立起来的结构的内容。

最后，我们要提一下(49:S)的另一个解释。回忆27.2的不等式(27:7)(也可见图50)，它规定了v(S)的界限，W_Γ是这样一些S组成的集合，对于这些S，v(S)达到了上限值；L_Γ是这样一些S组成的集合，对于这些S，v(S)达到了下限值。

49.4 简单博弈的严格定义

49.4 (49:E)允许我们给48.1.2和48.2.1中提到并在49.1.3的开头较详细描述的一类博弈下一个严格定义：其中所有玩家的目的是建立特定的关键联盟，而且其中不存在需要定量描述的其他动机。

把(49:E)的关于本质博弈的开头部分与(49:1)结合起来，这一概念的正式表述是：

(49:1:b) $$W_\Gamma \cup L_\Gamma = \bar{I}。$$

事实上，这个条件表达的是，任何给定的联盟S要么属于胜利联盟，要么属于失败联盟，没有其他归属。

相应地，我们定义：一个满足(49:1:b)的本质博弈被称为简单博弈(simple game)。简单博弈的概念在策略等价下是不变的，因为集合W_Γ、L_Γ是不变的。

49.5 简单博弈的一些基本性质

49.5.1 在对这一概念进行详细数学分析之前，让我们再一次考虑49.3的总结说明。从那里的说明的意义上说，如果对于每个S，v(S)落在27.2中的不等式(27:7)为

其指定的区域的边界上[①]，那么，本质博弈就是简单博弈。

各种（正规的，$\gamma=1$ 的）n 人博弈能够被看作图 65 中给定的特定维数的几何描述。更确切地说，上述不等式在问题中维数的线性空间中定义一个凸多面体值域 Q_n，而且这个值域的点代表着所有这些博弈。[②]

49.5.2 例：对于 $n=3$，上述维数是零，且值域 Q_3 是一个点。对于 $n=4$，这一维数是 3，且值域 Q_4 是 34.2.2 的立方体 Q。

现在，简单博弈是这样一些博弈，对于这些博弈，我们位于每个不等式的边界上。关于凸多面值域 Q_n，这意味着：简单博弈是 Q_n 的顶点，$n=3,4$。

例：对于 $n=3$，Q_3 是一个点，即顶点之外没有别的东 429
西，所以本质三人博弈是简单博弈。[③] 对于 $n=4$，Q_4 是立方体 Q，所以，简单博弈是顶点，即 I—VIII。[④]

49.6 简单博弈及其 W、L：最小胜利联盟 W^m

49.6.1 结合（49:E）和简单博弈的定义，我们得到：

---

① 该边界由两个点组成：上限值 $n-p$，下限值 $-p(\gamma=1)$。$v(S)$ 必须是其中之一。——428，①

② 熟悉 n 维线性几何学的读者会注意到：由于 Q_n 是由线性不等式定义的，它是一个多面体。27.6 的讨论允许我们得出它是凸集的结论。——428，②

③ 见 50.1.1 中的（50:A）。——429，①

④ 一旦我们关注角 I、V、VI、VII，这并不令人吃惊：48.1 中，我们的讨论从这些点开始，我们的简单博弈概念恰恰得自这些点的推广。

角 II、III、IV、VIII 的重新出现较令人费解：我们在 35.2 中将其作为可分解博弈的范型来研究。然而，根据（50:A）和 51.6 的开头，不难判断，它们也是简单博弈。——429，②

(49:F)　两个给定的系 W、$L(\subseteq \bar{I})$ 是一个适当的简单博弈 Γ 的 W_Γ、L_Γ，其充分必要条件是：(48:A:a)—(48:A:d)和(49:C)。

对于简单博弈来说，可以肯定，(49:2)中所指 S 穷举了 I 的全部子集。所以，对于简单博弈且仅仅对于这些博弈来说，在该博弈是正规的和 $\gamma=1$ 的情况下，有关 W_Γ、L_Γ 的知识决定 v(S)。也就是说，没有最后的附带条件，它在策略等价博弈程度上决定该博弈。

我们重述如下：

(49:G)　当且仅当博弈 Γ 是简单博弈时，在策略等价程度上，该博弈由其 W_Γ、L_Γ 决定。

因此，根据(49:F)和(49:G)，有关简单博弈的理论与关于满足(48:A:a)、(48:A:d)和(49:C)的那些成对的系 W、L 的理论有共同的范围。

49.6.2　在研究上述系对 W、L 时，我们应该回顾 48.2.2，尤其是(48:W)、(48:L)和(49:2)。根据这些，为了确定 W、L，提到 W 或 L 也就足够了。

条件(48:A:a)—(48:A:d)可以按如下方式被取代：如果使用的是 W，那么，由(48:W)取代之；如果使用的是 L，那么，由(48:L)取代之。

至于(48:C)，它直接联系 L。通过应用(48:A:b)，我们完全能够同样地提到 W，这样，其中提到的集合必须由其子集取代。

为完全起见，我们重述(48:W)和(48:L)以及(49:C)的相应形式。

集合 $W(\subseteq \bar{I})$ 有下述性质描述：

(49 : W*)

(49 : W* : a)　　两个(在 I 中)互补的集合 S 和 $-S$ 中有且只有一个属于 W。

(49 : W* : b)　　W 包含其元素的超集。

(49 : W* : c)　　W 包含 I 和所有 $(n-1)$ 元集合。

集合 $L(\subseteq \bar{I})$ 由下列性质刻画： 430

(49 : L*)

(49 : L* : a)　　两个(在 I 中)互补的集合 S 和 $-S$ 中有且只有一个属于 L。

(49 : L* : b)　　L 包含其元素的子集。

(49 : L* : c)　　L 包含空集和全部一元集。

正如我们在上面指出的那样，我们能够把理论建立在满足(49 : W*)的 W 或满足(49 : L*)的 L 之上。

49.6.3　由于人们习惯于更多地关注胜利联盟，较少关注失败联盟，我们将使用前者。

这里，我们看到，W 的特定子集与 W 有同样重要性。这是 W 的这样一个子集 S，它没有属于 W 的真子集。我们称这样的 S 为 W 的最小元素(即 W_Γ)，且这样的 S 组成的集合记为 W^m(即 W_Γ^m)。

这一概念的直觉上的含义是清楚的：这些最小胜利联盟是真正的关键联盟，其中的每位玩家都是必不可少的。(我们也许会想起，48.1.3 的讨论就是从枚举我们当时正在考虑的博弈的这些联盟开始的。)

49.7　简单博弈的解

49.7.1　引入简单博弈概念的那些试探性分析表明，

关于这类博弈的讨论要比关于 n 人(零和)博弈的讨论容易。为了说明这一点,我们必须研究一个简单博弈的解是如何确定的。由于我们正在使用的是旧理论,我们必须参照 30.1.1。[①] 首先,我们要看到的是,在一个简单博弈中,每个集合要么是肯定必要的,要么是肯定不必要的(见 31.1.2),这会带来预料之中的重大简化。

49.7.2 为了证明这一断言,我们首先证明:

(49:H) 在任何本质博弈 Γ 中,W_Γ 的全部集合 S 是肯定必要的,L_Γ 的全部集合 S 是肯定不必要的。

证明:如果 S 属于 L_Γ,那么,它是一个平集,根据 31.1.5 中的(31:F),它是肯定不必要的。如果 S 属于 W_Γ,那么,$-S$ 是平集(因为它属于 L_Γ)且 $S \neq \ominus$(因为空集属于 L_Γ,而不属于 W_Γ)。所以,根据 31.1.5,S 是肯定必要的。

现在,我们能够兑现我们在上面许下的关于简单博弈的诺言了。事实上,我们能够以两种不同方式做到这一点。

431 (49:I) 在任何简单博弈 Γ 中,W_Γ 的全部集合 S 是肯定必要的,且其他集合是肯定不必要的。

证明:对于一个简单博弈来说,L_Γ 恰好是 W_Γ 的补集。

---

① 如 44.7.2 中那样,用新理论的术语说,这意味着:我们正在寻找 $E(0)$ 的解,即剩余等于零时的解。

在 51.6 的第三项说明中,把剩余被限制为零的意义将变得更为明确。——430,①

将这一结果与(49:H)结合起来就是(49:I)的证明。

(49:J)　　在任何简单博弈Γ中，W_{Γ}^{m} 的所有集合 S 是肯定必要的，且其他集合是肯定不必要的。[①]

证明：我们能够把(49:I)的 W_{Γ} 换成其子集 W_{Γ}^{m}，即根据31.1.3中的(31:C)，我们能够把来自肯定必要类的 $W_{\Gamma}-W_{\Gamma}^{m}$ 的所有 S 转变为肯定不必要的集合。事实上，W_{Γ} 中的每个 S 都在 W_{Γ}^{m} 中有它的一个子集 T。

(49:I)和(49:J)这两个准则中，后者更为有用。它们的重要性将在简单博弈中解的实际确定中得到证明。[②]事实上，有关简单博弈的这一分析允许我们深入理解有多个参与者的博弈理论。[③]

50. 多数博弈和主解

50.1　简单博弈的例子：多数博弈

50.1.1　在展开进一步讨论之前，我们先给出一些简单博弈例子，即49.6.1中(49:F)的 W、L 的几个例子。49.6.2告诉我们，我们只需讨论(49:W*)所描述的 W。

因此，我们将考虑引入这样的 W 的若干可能途径，即

---

① (49:I)与(49:J)的比较告诉我们，$W_{\Gamma}-W_{\Gamma}^{m}$ 的 S 既是肯定必要的，又是肯定不必要的。这是第274页脚注①末尾说明的另一例证。——431,①

② 见50.5.2和55.2。——431,②

③ 见55.2—55.11，另尤其见54中的一般说明。——431,③

引入胜利这一概念的若干可能定义。

多数原则本身就是一个非常合适的胜利定义。因此，一个合理的定义是，把 W 定义为包含多数玩家的 S 的系。然而，我们将会看到，我们必须排除和局。事实上，(49:W*)已经指明了这一点，对于每个 S 来说，S 或 $-S$ 必须包含全体玩家的多数，从而排除了两者各包含一半玩家的情况。换句话说：总参与者个数必须是奇数。

所以，如果 n 是奇数，我们可以把 W 定义为有 $>\frac{n}{2}$ 个元素的 S 组成的集合。[1] 以这种方式得到的简单博弈[2]被称为**直接多数博弈**。

432 要做到这一点[3]，最小的 n 是 3。我们知道，仅仅存在着一个本质三人博弈，而且对于这个 W 来说，它恰好由二元和三元集即大于 $\frac{3}{2}$ 的集合组成。所以，我们看到：

(50:A) （惟一的）本质三人博弈是一个简单博弈。它是三个参与者的直接多数博弈。

对于后面的合适的 n（$n=5,7,\cdots$）来说，直接多数博弈只不过是众多可能性之一。

50.1.2 直接多数博弈只能在 n 是奇数时才能得到，

---

① 由于大于 $\frac{n}{2}$ 的最小奇数是 $\frac{n+1}{2}$（n 是奇数），我们也可以说：S 必须至少有 $\frac{n+1}{2}$ 个元素。——431，④

② 确切地说：（n 个参与者的）一类策略等价博弈。——431，⑤

③ 即它是奇数且一个博弈能够成为一个本质博弈。——432，①

而简单博弈只是在 n 是偶数时才存在——事实上，我们的简单博弈原型有 $n=4$（见 48.1.2 和 48.1.3）。

然而，多数这一概念很容易推广到 n 是偶数的情况。为此，我们以如下方式引入加权多数：赋予玩家 $1,\cdots,n$ 中的每位一个权重，如 $w_1,\cdots,w_n$。把 W 定义为这样的 S 组成的集合，S 包含总权重的多数。这意味着：

(50:1) $$\sum_{i\text{属于}S} w_i > \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i,$$

或等价地说，

(50:2) $$\sum_{i\text{属于}S} w_i > \sum_{i\text{属于}-S} w_i。$$

我们必须再次精心排除和局情况。然而，由于我们目前结构的更一般性，我们最好直接进行(49:W*)的全面讨论。

50.1.3 所以，我们要看一看 $w_1,\cdots,w_n$ 受到什么约束。

关于(49:W*:a)：由于我们能够说 S 因(50:2)而属于 W，所以当

(50:3) $$\sum_{i\text{属于}S} w_i < \sum_{i\text{属于}-S} w_i$$

时，$-S$ 属于 W。所以，(49:W*:a)意味着，(50:2)或(50:3)成立，但永远不会同时成立。这显然意味着，永远不会有

(50:4) $$\sum_{i\text{属于}S} w_i = \sum_{i\text{属于}-S} w_i,$$

等价地说，永远不会有

(50:5) $$\sum_{i\text{属于}S} w_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i。$$

(49:W*:b)：利用(50:1)中 W 的定义，如果 $w_i \geq 0$，那 433

么,该条件显然得到满足。①

(49:W*:c):利用(50:1),显然 $I=(1,\cdots,n)$ 属于 W。对于一般 $(n-1)$ 元集 $S=I-(i_0)$,条件(50:1)表明:

$$w_{i_0} < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i。$$

总之:

(50:B)　　根据(50:1)或(50:2),权重 $w_1,\cdots,w_n$ 能够用于定义一个满足(49:W*)的 W 的充分必要条件是:

(50:B:a)　　对于 $i_0=1,\cdots,n$

$$0 \leqq w_{i_0} < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i。$$

(50:B:b)　　对于所有 $S\subseteq I$,

$$\sum_{i\text{属于}S} w_i \neq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i。$$

口头上说:一位玩家总有非负权重,但永远不会大于总权重的一半。不存在权重正好等于总权重的一半的玩家组合。②

得自 W 的简单博弈③被称为(n 个参与者,权重分别为 $w_1,\cdots,w_n$ 的)加权多数博弈。我们还将用 $[w_1,\cdots,w_n]$ 记这个博弈。

因此,直接多数博弈的记号是 $[1,\cdots,1]$。

---

① 当然,这是一个完全合理的条件。事实上,令人吃惊的事情是,我们没有被迫要求 $w_i>0$,即我们能够让某个权重等于零。——433,①

② 第一个条件排除了49.2的困难,第二个条件排除了和局。——433,②

③ 确切地说:策略等价的一类博弈。——433,③

我们将会看到，48.1.2 和 48.1.3 中讨论的 Q 的角 I 所代表的四人博弈能够被描述为一个加权多数博弈。事实上，48.1.3 中建立起来的胜利原则能够被说成，玩家 1、2、3 有一个相同权重，而玩家 4 有双倍权重。也就是说，这个博弈有记号[1,1,1,2]。

50.2 齐次性

50.2.1 多数博弈的引入及其记号[$w_1, \cdots, w_n$]是对简单博弈进行定量(数量)分类和描述的步骤之一。我们有充分理由认为，完成这一计划是最为迫切的事情：简单博弈是用组合、集合术语定义的，而且预料之中的事情是，数量描述将使它们变得容易处理。这样的描述通常有利 434
于全面定量地理解概念。另外，在我们目前的问题中，我们将最终找出数量地定义的解，从而，很有可能，一个数量特征较一个组合特征更为直接地对应着它们。

然而，这一个转变的第一步远未完成。

一方面，一个简单博弈可以有多个记号[$w_1, \cdots, w_n$]——事实上，有一个记号的每个简单博弈都有无穷多个记号。① 另一方面，我们根本不知道所有的简单博弈是否都有这样的记号。②

我们首先考虑上面提到的缺陷。由于同一简单博弈可以有若干个记号[$w_1, \cdots, w_n$]，一个自然的办法是通过

① 显然，w_i 的充分小的变化不破坏(50:1)的成立，尤其是因为(50:5)被(50:B:b)排除了。——434，①

② 我们将会在 53.2 发现有的简单博弈没有记号。——434，②

某种方便的筛选原则从中选出特殊的一个。对这一原则的一个合理的要求是，增加 $w_1, \cdots, w_n$ 的意义和有用性。

首先，一些初步结果。条件(50:1)、(50:2)暗示我们考虑

(50:6) $$a_S = 2\sum_{i\text{属于}S} w_i - \sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i\text{属于}S} w_i - \sum_{i\text{属于}-S} w_i。$$

这个 a_S 表达了联盟 S 的重要性超过其对手多少——它有多大的加权多数。下面是其直接性质：

(50:C) $$a_S = -a_{-S}。$$

证明：利用有关 a_S 的(50:6)的最后一个形式。

(50:D:a) $a_S > 0$， 当且仅当 S 属于 W。

(50:D:b) $a_S < 0$， 当且仅当 S 属于 L。

(50:D:c) $a_S = 0$， 不可能。

证明：(50:D:a)的证明：这是定义。

(50:D:b)的证明：直接得自(50:D:a)和(50:C)。

(50:D:c)的证明：直接得自(50:D:a)和(50:D:b)，因为 W、L 穷尽了所有 S。它还与(50:B:b)一致。

50.2.2 现在，一个自然的想法是，对权重 $w_1, \cdots, w_n$ 进行排列，使得对于每个胜利联盟来说，保证胜利的 a_S 相同。然而，对 W 的所有 S 提出这一要求是无理的：如果 S 属于 W，那么，其真超集 T 也属于 W，而且它们可以有 $a_T > a_S$。[①] 由于这样一个 T 包含对于胜利来说不必要的玩家，将其忽略似乎是自然的事情。也就是说，我们仅仅要求，S

---

① 因此，除非对于不属于 S 的 i 来说，总有 $w_i = 0$，那么，如果 $T = I \supseteq S$，那么，$a_I > a_S$。——434，③

不是 W 的其他元素的真子集，对于 W 的这样的 S 来说，a_S 是常数。用 49.6.3 中的术语说：我们要求 a_S 对于 W 的最小元素——即 W^m 的元素——来说是常数。 435

相应地，我们定义：

(50:E) 如果对于 W^m 的所有 S，(50:6) 的 a_S 有一个共同值，记为 a，那么，我们称权重 $w_1,\cdots,w_n$ 是齐次的。

当(50:E)成立时，我们将写 $[w_1,\cdots,w_n]_h$ 以示区别。

显然，$a>0$。一个正的公因数不影响 $w_1,\cdots,w_n$ 的显著性质，因此，在齐次权重情况下，我们能够进行最后的正规化：使 $a=1$。

让我们以如下观察结果来结束这一节，50.1.3 末尾提到的博弈是齐次博弈，且因 $a=1$ 而是正规的。这些是奇数个参与者的直接多数博弈 $[1,\cdots,1]$ 和 Q 的角 I$[1,1,1,2]$，它们能够相应地被分别写成 $[1,\cdots,1]_h$ 和 $[1,1,1,2]_h$。事实上，读者可以轻易验证，对于两种情况下的 W^m 的 S 来说，$a_S=1$。

50.3 分配的概念在求解中的更直接运用

50.3.1 上述齐次情况密切联系着分配这一普通的经济学概念。

更确切地说：我们在 30.1.1 中定义了一个一般的分配概念，并且以其为基础建立了解的概念。在建立这些概念时，我们受到了经济学中使用的相同判断准则的引导，因此其与普通经济学概念的联系也是预料之中的事情。然而，我们的分析使我们相当远离了那一概念。这尤其适

用于这样一些结构,当我们发现我们的理论主题是分配集——即解——而非单个分配时,这些结构是必需的。我们将看到,对于特定的简单博弈来说,其与分配的普通经济学概念的联系能够较直接地建立起来。实际上,它将提供一个简单方法,使我们找到这些博弈中每一个的一个特殊的解。

50.3.2 解的两个概念,即两种方法,有效地相互支持着。普通经济学概念对特定的解的形式提供一个有用的推测。从而,我们的数学理论可以被用于确定问题中的解,并且普通方法的条件得到完善。(见 50.4 和 50.5。)

这些分析还有助于另一个目的:它们极为清楚地说明

436 了寻常方法的不足之处。在这一形式中,寻常方法只对简单博弈起作用。即使是在简单博弈中,我们的数学理论也并非总是无用或完全无用。另外,它并没有揭示它所分析的博弈的全部解。(进一步的讨论将对这个题目进行更多说明,特别是在 50.8.2 中。)

这里,我们再次强调,任何博弈都是一个可能的社会或经济组织的模型,任何解则是其中一个可能的稳定行为标准。上述方法——即没有被改进的经济学分配概念——没有包括的博弈和解对于社会或经济理论来说的确是重要的。我们将会看到,能够用这一特殊方法对付的简单博弈密切联系着齐次加权多数博弈,而齐次加权多数博弈是简单博弈的推广。

50.4 直接方法

50.4.1 考虑一个简单博弈 Γ,我们假设它有简化

型，$\gamma=1$，但是它不受其他约束。让我们试着在普通经济学概念意义上讨论这一博弈，而不使用我们的系统理论。

显然，在这一博弈中，玩家的惟一目标是建立一个联盟，而且一旦一个最小联盟建立起来，其参与者没有让更多成员加入的动机。所以，我们能够假设，最小胜利联盟——W^m 的 S——就是将会建立起来的结构。因此，我们可以合理地假设，一位玩家的命运只有两种选择机会：他要么成功加入渴望加入的联盟，要么没有。在后一种情况下，他是一个失败者，因此他得到数额 -1。在前一种情况下，他是一个胜利者，而且，按照普通经济学概念，我们应该用一个值描述这一胜利。这个值因玩家不同而不同。对于玩家 i，我们用 $-1+x_i$ 记之，这样 x_i 是对于玩家 i 而言的失败与成功之间的边际量。[①]

50.4.2　让我们说明这些 $x_1,\cdots,x_n$ 必须服从的条件，使之符合传统经济学论述。

首先：按照 x_i 的含义，必然有

(50:7)　$$x_i \geqq 0。$$

第二：如果恰巧不存在包含特定玩家 i 的最小胜利联盟，那么，对于他来说，除了 -1 之外，没有其他选择，这样

---

① 这里，我们假设仅仅存在一种取胜的方式，即无论玩家 i 成功加入哪一个（最小胜利）联盟，边际 x_i 相同。这是合理的，因为一个简单博弈中只存在一种胜利：完全的胜利——每个联盟要么完全失败，要么完全胜利。

我们将在 50.7.2 和 50.8.2 中看到，这一观点将在多大程度上发挥作用。只要它起作用，我们就能够方便地将其与我们的系统理论结合起来。——436，①

我们没有必要为其定义一个 x_i。[1]

437 第三:如果一个最小胜利联盟 S 变成了有效集,那么,这些玩家中间的分配是:不属于 S 的每位玩家 i 得到 -1,属于 S 的每位玩家得到 $-1+x_i$。这些数额之和必须等于零。这意味着,

$$0=\sum_{i不属于S}(-1)+\sum_{i属于S}(-1+x_i)=-n+\sum_{i属于S}x_i,$$

即

$$(50{:}8)\qquad \sum_{i属于S}x_i=n。$$

在我们的符号体系中,这个分配被描述为向量 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_i\}$,它的分量是

$$\alpha_i=\begin{cases}-1 & i不属于S,\\ -1+x_i & i属于S。\end{cases}$$

我们用 $\vec{\alpha}^S$ 记这个向量。事实上,我们的起始条件和目前这一条件等于说,$\vec{\alpha}^S$ 是 30.1.1 意义上的一个分配。

50.4.3 按照常有的思路,我们接下来要借助上面的三项说明来确定 $x_1,\cdots,x_n$。在这么做时,我们还必须考虑到:我们已经从第三项说明开始了,其中的 S 必须是最小胜利联盟,即属于 W^m。然而,一个可能的问题是,是否 W^m 的所有 S 都能够被使用呢?

事实上,目前的方法无非是常见的价值分配方法,即按照机会用途赋予补充物品相应的价值。[2] 现在,机会用

---

① 对于真正简单博弈来说,这样的 i 不存在,即每位玩家属于某个最小胜利联盟。见 51.7.1 中的初步结果和(51:0)。——436,②

② 在这种情况下,说服务较为恰当。我们的分析对象是玩家 i 向其加入的联盟贡献的总服务。——437,①

途可能比不同物品的个数还要多，即 W^m 可能有 n 个以上元素。①

然而，显然的一点是，如果 W^m 的 S 不被包括其中，即如果

(50:8) $$\sum_{i\text{属于}S} x_i = n$$

对于它来说不成立，那么，它必定是无利可图的。也就是说，在(50:8)中，我们必定有一个 > 来取代 = ： 438

(50:9) $$\sum_{i\text{属于}S} x_i > n。$$

进而出现的一个问题是：我们按照什么准则来确定 W^m 的哪个 S 符合第三项说明即(50:8)成立。记这些集合组成的集合为 $U(\subseteq W^m)$。那么，对于 $W^m - U$ 的 S 来说，(50:9)必定成立。这样，我们的问题变成了确定 U。②

50.5 与一般理论的联系：严格阐述

50.5.1 让我们回到我们的系统化理论，而不仅仅满足于口头描述。根据 50.4 中的说明，我们继承如下结果：考虑最小胜利联盟组成的一个系，即一个集合 $U \subseteq W^m$ 和 x_i。如 50.4 中那样，构造分配

$$\vec{\alpha}^S = \{\alpha_1^S, \cdots, \alpha_n^S\}。$$

$$\alpha_i^S = \begin{Bmatrix} -1, & i\text{不属于}S \\ -1 + x_i, & i\text{属于}S \end{Bmatrix}, \quad S\text{属于}U。$$

---

① 见 53.1 中的第四项说明。——437，②

② 试图用(50:9)来确定 $W^m - U$(和 U)的想法是十分错误的。这样的话，$x_1, \cdots, x_n$ 就没有受到充分约束且它们确定不是真正的目标！——438，①

S 属于 U 时，这些$\overrightarrow{\alpha^S}$的确是分配。如我们所知，这一点正是 50.4 的条件所表达的。

(50:7) $$x_i \geqq 0,$$

(50:8) $$\sum_{i\text{属于}S} x_i = n, \quad S\text{ 属于 }U。$$

构造 $\overrightarrow{\alpha^S}$的集合 V，$S$ 属于 U。我们将决定 U 和 x_i 是否令人满意。我们的做法是确定这个 V 是否是 30.1.1 意义上的一个解。

我们将看到，以这种方式得到的结果可用文字表述，而且从普通的经济学角度看，该结果是完全合理的。但是，可能成问题的是，它能否通过常用的方法毫不含糊地建立起来。这也许是我们的数学理论能够成为普通经济学方法的纯粹口头讨论的先导的一个例子(见 50.7.1)。

50.5.2 我们继续研究 V 是否是一个解。

我们要首先确定，在什么情况下，一个给定的分配 $\vec{\beta}$ 被一个给定的$\overrightarrow{\alpha^T}$占优，其中 T 属于 U。由于该博弈是一个
439 简单博弈，对于这一占优关系来说，30.1.1 的集合 S 能够被假设得属于 W[根据 49.7.2 中的(49:I)或(49:J)，甚或属于 W^m]。对于 S 中的每个 i，$\alpha_i^T > \beta_i \geqq -1$；对于不属于 T 的每个 i，$\alpha_i = -1$：所以 $S \subseteq T$。现在，T 属于 $U \subseteq W^m$，S 属于 W，从而 $S \subseteq T$ 给出 $S = T$。而且，T 能够在那里得到应用，因为它是肯定必要集，它属于 $U \subseteq W^m \subseteq W$，见上。所以占优关系 $\overrightarrow{\alpha^T} \succ \vec{\beta}$ 等于说：$\alpha_i^T > \beta_i$，i 属于 T，即

(50:10) $$\beta_i < -1 + x_i \quad i\text{ 属于 }T。$$

对于任意分配 $\vec{\beta} = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$，用 $R(\vec{\beta})$ 记满足

(50:11)　　　　$\beta_i \geqq -1 + x_i$

的 i 组成的集合。那么,(50:10)表明,$R(\vec{\beta})$ 与 T 不相交。这一关系的另外一个表达方式是

(50:12)　　　　$-R(\vec{\beta}) \supseteq T$。

我们重述为:

(50:F)　　　　$\vec{\alpha}^T \succ \vec{\beta}$ 等价于(50:12)。

我们能够从这一结果中推出:

(50:G)　　　　令 U^* 是这样的 $R(\subseteq I)$ 组成的集合,R 的某个子集属于 U。

令 U^+ 是 $-R$ 不属于 U^* 的 $R(\subseteq I)$ 组成的集合。

那么,$\vec{\beta}$ 不被 V 的任何元素占优的充分必要条件是 $R(\vec{\beta})$ 属于 U^+。

证明:如果 $\vec{\beta}$ 被 V 的某个元素——即被某个 $\vec{\alpha}^T$,T 属于 U——占优,那么,(50:12)对 U 中任何 T 都成立。这等于说,$-R(\vec{\beta})$ 属于 U^*,即 $R(\vec{\beta})$ 不属于 U^+。

所以,$R(\vec{\beta})$ 属于 U^+ 的充分必要条件是,$\vec{\beta}$ 不被 V 的任何元素占优。

50.5.3　在进一步深入讨论之前,我们考察(50:G)的集合 U^+ 的四个简单性质。

(50:H:a)　　　　如果 $U = W^m$,那么,$U^* = U^+ = W$。

证明:假设 $U = W^m$,那么,U^* 由这样一些集合组成,它们有某个子集属于 W^m,即一个最小胜利子集。因此,$U^* = W$。(50:G)中从 U^* 到 U^+ 的运算是 48.2.1 中的变换

(48:A:a)和(48:A:b)的组合。这样,我们看到,当应用于
440 W 时,这两个变换是互补的。所以,$U^{\bullet}=W$ 给出 $U^{+}=W$。

(50:H:b) $U^{\bullet}$ 是一个单调运算且 U^{+} 是一个反单调运算,即如果 $U_1 \subseteq U_2$,那么,$U_1^{\bullet} \subseteq U_2^{\bullet}$ 且 $U_1^{+} \supseteq U_2^{+}$。

证明:只需回忆(50:G)中的定义,我们就可以看出,$U_1 \subseteq U_2$ 意味着 $U_1^{\bullet} \subseteq U_2^{\bullet}$ 且 $U_1^{+} \supseteq U_2^{+}$。

(50:H:c) 所有 $U \subseteq W^{m}$ 都有 $U^{\bullet} \subseteq W \subseteq U^{+}$。

证明:这是(50:H:a)与(50:H:b)的结合(用 U、W^{m} 取代 U_1、U_2)。

(50:H:d) $U^{\bullet}$ 和 U^{+} 都包含它们的元素的超集。

证明:对于 $U^{\bullet}$ 来说,这是显然的。我们正在考虑的性质正是 48.2.1 中的(48:A:c)中阐述的性质。(那里的 W 取代了我们的 $U^{\bullet}$ 和 U^{+}。)现在,(50:G)中从 $U^{\bullet}$ 到 U^{+} 的运算是 48.2.1 中变换(48:A:a)和(48:A:b)的组合[见(50:H:a)的证明]。把 48.2.2 中的(48:B)应用于这两个变换表明,从 $U^{\bullet}$ 到 U^{+} 的过渡中,问题中的性质得以保留。

50.5.4 注意,$U^{\bullet}$ 和 U^{+} 允许一个简单的口头解释。如果我们知道只有属于 U 的联盟才有可能是胜利联盟,那么,其中哪些肯定是胜利联盟,哪些是肯定不失败的联盟呢?

前者是这样一种情况,该联盟有属于 U 的子集,即 $U^{\bullet}$ 那些元素。肯定失败的联盟是这些联盟的补集,即不属于 U^{+} 的那些联盟的补集。所以,$U^{\bullet}$ 是首先提到的联盟组成的集合,而 U^{+} 则是后面提到的联盟组成的集合。

现在，(50:H:a)—(50:H:c)的含义变得清楚了：对于 $U = W^{m}$，一切都是清楚的：肯定胜利联盟恰恰是这样一些联盟，它们不是肯定失败的联盟，而且它们形成集合 W。随着 U 从 W^{m} 变小，差距变大。第一个集合通过 W 的子集变小，第二个集合通过 W 的超集变大。

(50:H:d)的断言同样是合理的。

50.6　结果的重新描述

50.6.1　50.5.2 的(50:G)允许我们给出如下陈述：

(50:I)　　V 是一个解的充分必要条件是，当 $\vec{\beta}$ 属于 V 时，恰好有 $R(\vec{\beta})$ 属于 U^{+}。

这样，我们必须决定的只是什么时候(50:I)成立。为此，我们考虑 U^{+} 中的一个 R 并确定 $R(\vec{\beta}) = R$ 的 $\vec{\beta}$。

考虑如下三种可能性：

(50:13)
$$\sum_{i\text{不属于}R}(-1) + \sum_{i\text{属于}R}(-1 + x_i) \overset{>}{\underset{<}{=}} 0,$$

即　441

(50:14)
$$\sum_{i\text{属于}R} x_i \overset{>}{\underset{<}{=}} n。$$

如果存在一个满足 $R(\vec{\beta}) = R$ 的 $\vec{\beta}$，那么，我们有

(50:15)
$$0 = \sum_{i=1}^{n}\beta_i \geqq \sum_{i\text{不属于}R}(-1) + \sum_{i\text{属于}R}(-1 + x_i),$$

即(50:13)，(50:14)中有≦。所以，(50:13)和(50:14)中

的 > 排除了满足 $R(\vec{\beta}) = R$ 的 $\vec{\beta}$ 的存在性。也就是说，我们不必进一步考虑 U^+ 中满足(50:13)和(50:14)中 > 的集合 R。另一方面，考虑 U^+ 中一个满足(50:13)和(50:14)中 < 的集合 R。那么，满足 $\sum_{i=1}^{n}\beta_i = 0$ 且 $\beta_i \geqq \begin{cases} -1, & i\text{不属于}R \\ -1 + x_i, & i\text{属于}R \end{cases}$ 的 $\vec{\beta}$ 有无穷多。对于这些 $\vec{\beta}$，必然有 $R(\vec{\beta}) \supseteq R$。所以，根据(50:H:d)，它属于 V。由于 V 是有限的，这些 $\vec{\beta}$ 不能都属于 V。这是一个矛盾。也就是说，U^+ 中满足(50:13)和(50:14)中的 > 的集合 R 绝对不存在。

50.6.2 接下来，我们要考虑的是 U^+ 中满足(50:13)和(50:14)中 = 的集合。根据上面的分析，这些集合必须恰好提供 V 的 $\vec{\beta}$。

如果这些 $\vec{\beta}$ 属于 V，即 $\vec{\beta} = \vec{\alpha}^T$，$T$ 属于 U，那么，我们有这样的情况：$R(\vec{\beta})$ 等于 T 加上 $x_i = 0$ 的那些 i 组成的集合。T 属于 $U \subseteq U^* \subseteq U^+$[对第二个关系利用(50:H:c)]，所以 $R(\vec{\beta})$ 属于 U^+。还有，

$$\sum_{i\text{属于}R(\vec{\beta})} x_i = \sum_{i\text{属于}T} x_i = n。$$

这样，我们有(50:13)和(50:14)中的 =。所以，V 的 $\vec{\beta}$ 都被考虑到了。

相反：考虑 U^+ 中一个满足(50:13)和(50:14)中 = 的 R。给 R 添加 $x_i = 0$ 的 i，[根据(50:H:d)]既不影响 R 属于 U^+，也不影响方程(50:14)。所以，我们可以假设 R 包含这些 i。

如果一个分配 $\vec{\beta}$ 有 $R(\vec{\beta})=R$，那么，对于 R 中的 i，$\beta_i \geqq -1+x_i$。$\beta_i \geqq -1$ 总是成立。因为 $\sum_{i=1}^{n}\beta_i=0$，这意味着：

(50:16) $$\beta_i=\begin{cases}-1, & i\text{不属于}R\\ -1+x_i, & i\text{属于}R。\end{cases}$$

相反：(50:16)意味着，$\vec{\beta}$ 是一个满足 $R(\vec{\beta})=R$ 的分配。 442
所以，在这种情况下，我们必须要求，(50:16)的 $\vec{\beta}$ 是一个 $\vec{\alpha}^T$，T 属于 U。这意味着，T 和 R 的不同仅仅在于 $x_i=0$ 的元素 i 的不同。而且，这一性质对我们最初关于 R 的修改——把所有这样的 i 包含在 R 之中——并不敏感。

总之：

(50:J) V 是一个解的充分必要条件是：当 $x_i=0$ 时，称 i 是无所谓的。①

从而，对于 U 的 T 以及与之仅仅相差无差异元素的集合，我们有

(50:8*) $$\sum_{i\text{属于}T}x_i=n$$

而且，对于 U^+ 的其他 T，我们必须要求

---

① 这些 i 带来少许复杂性，这一复杂性又因我们还没有它们实际发生的博弈例子而增大。也可能，它们从来就不存在。一个无所谓的 i 描述的是这样一位玩家，他属于某个最小胜利联盟，但是他从不分享联盟的成果。

三人博弈的有歧视解中被排斥的玩家就处于这种情况。[见32.2.3中的(32:A)，其中，$c=1$。]但是，那个解是一个无穷解，而我们这里的V必须是有限的。

决定这个有关存在性的问题是有意义的。无论如何，我们必须考虑到无所谓的 i，以免失去一般性或严密性。——442，①

(50:9*) $$\sum_{i属于T} x_i > n。$$

在应用这一结果时,我们可以首先选择集合 $U \subseteq W^m$,然后根据(50:8*)确定 x_i,并最终验证这些 x_i 是否满足不等式

(50:7) $$x_i \geqq 0$$

和(50:9*)。

50.7 结果解释

50.7.1 结果(50:J)允许我们给出在 50.5.1 中许诺的口头解释。这个解释是:

通过随意选择那些被认为是有利可图的最小胜利联盟所组成的集合 U(即 $U \subseteq W^m$),一个解 V 被找到。x_i 必须满足相应的方程(50:8*)。但此后,我们必须验证,特定的其他联盟从(50:9*)意义上说肯定是无利可图的。
443 对于那些已知会取胜的联盟和那些无法证明肯定会被 U(即 U^+)的联盟打败的那些联盟——当然,U 本身例外①——来说,我们都有这一要求。

读者可以根据这一说明来判断 50.5.1 的总结说明是否合理。

50.7.2 为(50:I)找出合适的 U 是一个精妙的问题。U^+ 的反单调性[见 50.5.3 中的(50:H:b)]表明:逐步变小的 U,即等式的个数,使 U^+ 变大,即不等式的个数增加,反之亦然。

尤其是,如果我们把 U 选择得尽可能大,即 $U = W^m$,那

---

① 以及那些与它们仅仅相差无所谓元素的那些联盟。——443,①

么，与 U^{+}有关的不等式根本不造成任何困难。事实上：根据 50.5.3 中的(50:H:a)，$U = W^{m}$ 意味着 U^{v}。W 的一个 T 肯定有一个子集 S，S 是 W 中最小的，即属于 $U = W^{m}$。现在，如果 T 与这个 S 的不同并不限于无差异元素，那么，对于 $T - S$ 中的某个 i，$x_i > 0$，从而 $\sum_{i\text{属于}T} x_i > \sum_{i\text{属于}S} x_i = n$，即(50:9*)。

因此，方程(50:8*)能够(结合(50:7)求解，那么，$U = W^{m}$总给出一个解 V。

但是，正如我们在 50.4.3 中指出的那样，我们不能指望情况总是这样，尤其因为(58:8*)那样的方程的个数(即 W^{m} 中元素的个数)很可能比变量 x_i 还要多。

最后一个反对意见并不是绝对的。事实上，不难找到一个简单博弈，这些方程的个数超过变量的个数，但是解还是存在着的。[①] 另一方面，存在着这样的简单博弈，这些方程没有解。这种情况的一个例子较为隐蔽[②]，但是，该现象还是比较一般的。当这样的事情发生时，我们必须研究的一个问题是，是否能够通过适当选择 $U \subset W^{m}$ 来找到一个解 V 呢？我们在本节开头就对这一问题之困难和精妙做了评论。[③]

---

① 这种情况最初出现在 $n=5$ 的时候，见 53.1 中的第五项说明。——443，②

② 这种情况首先出现在 $n=6$ 的时候，见 53.2.5 中的第五点说明。——443，③

③ 我们还没有这样的例子：一个简单的一个解得自 $U \subset W^{m}$，但是也没有证明它不存在。一个进一步的问题是，是否每个简单博弈都有适当的 $U \subseteq W^{m}$ 的解呢？这个问题现在也没有答案。

这个问题具有一定的重要性。要解决它并不容易。它有点类似于第 154 页脚注①中提到的已解决的问题，但利用这种联系目前尚不可能。——443，④

50.8 与齐次多数博弈的联系

50.8.1 现在,我们的讨论仅限于 $U = W^m$ 的情况。也就是说,我们假设全部方程系统

(50:17) $$\sum_{i\text{属于}S} x_i = n, \quad S\text{属于}W^m,$$

能够结合

(50:7) $$x_i \geqq 0$$

444 求解。我们看到,在这种情况下,对于属于 W^m 的 S,$\vec{\alpha}^S$ 组成的集合 V 是一个解。在这种情况下,且只有在这种情况下,我们称 V 是一个主简单解。

这些条件与描述一个齐次加权多数博弈的条件之间有一定的相似之处。事实上,后者被界定为

(50:18) $$\sum_{i\text{属于}S} w_i = b, \quad S\text{属于}W^m$$

其中

$$b = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i + a\right), \quad a > 0,$$

[结合 50.2 的(50:D),(50:E)]

而且,

(50:19) $$w_i \geqq 0。$$

实际中,存在着更多相似性。因此,如果满足(50:18)和(50:19)的 w_i 的一个系被给定,满足(50:17)和(50:7)的 x_i 的一个系以如下方式得到:(50:18)的数量 b 是正的。① 用一个正的因数乘以所有的 w_i 并不影

---

① 不然的话,按照(50:18)和(50:19),出现在 W^m 的 S 中的所有的 i 就会有 $w_i = 0$。这样的话,对于 W^m 的 S,50.2.1 的(50:6)和(50:19)给出 $a_S \leqq 0$,矛盾。——444,①

响任何事情，而且通过把这个因数选择为 n/b，我们能够用 n 取代(50:18)中的数量 b。现在，令 $x_i \equiv w_i$，我们就简单地把(50:18)、(50:19)变成了(50:17)、(50:7)。

相反，如果满足(50:17)和(50:7)的 x_i 的一个系被给定，存在着一个额外的困难。我们可以令 $w_i \equiv x_i$①，那么，(50:7)变成了(50:19)且(50:17)产生(50:18)，有着 $b = n$，即 $a = 2n - \sum_{i=1}^{n} w_i$。但是，这里出现的问题是，$a > 0$ 这一最后要求是否得到满足，即

(50:20) $$\sum_{i=1}^{n} < 2n$$

是否成立。

总之：

(50:K) 每一个齐次加权多数博弈都有一个主简单解。

相反，如果一个(简单)博弈有一个主简单解，对于这个博弈，从中得出齐次权重的充分必要条件是，(50:20)得到满足。

50.8.2 齐次权重与主简单解之间的这一联系是显著的。但是，我们必须强调的一点是，一个齐次加权

① 属于最小胜利集合的 i 引起一个小的骚动，因为它们没有 x_i(见 50.4 中的第二点说明)，然而我们却要求它们有 w_i。这一意外情况并非完全不重要(见上)，而且，如我们轻易地从第 436 页脚注②得出的结论那样，我们能够令这些 $w_i = 0$。——444，②

445 多数博弈一般来说不同于主简单解的其他解。① 而且，一个有主简单解的博弈有可能不满足(50:20)，即

$$(50:21) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 2n$$ ②

中未必有<。

最后，我们决不能忽视这些分析的主要缺陷：不管我们取 50.8.1 的狭义形式的"普通"分配概念(即 $U=W^m$)，还是取 50.6、50.7.1 的其较宽泛的最初形式[即 $U\subseteq W^m$，见 50.6.2 中的(50:I)]，它都肯定被限于简单博弈。我们要超越这一点，超越这里描述的狭义解。这迫使我们完全回到 30.1.1 的系统化理论。这是我们在 50.3 末尾指出过的。

51. 全部简单博弈的枚举方法

51.1 概论

51.1.1 从 50.1.1 开始，我们引入了简单博弈，它们

---

① 本质三人博弈($[1,1,1]_h$，见 50.2 末尾)的主简单解是 29.1.2 的最初解，即 32.2.3 的(32:B)。32.2.3 和 33.1 告诉我们，其他解是存在的。

$Q([1,1,1]_h$，见 50.2 末尾)的角 I 的主简单解是 35.1.3 的最初解。我们将在第 55 节结合更为一般的$[1,\cdots,1,n-2]$(n 个参与者)讨论这一博弈，并得出所有的解。

所有这些引证弄清楚了的一点是，不是主简单解的解是相当显著的，见 33.1 和 54.1。——445，①

② =首次出现在 $n=6$ 的时候，见 53.2.4 的第四点说明。>首次出现在 $n=6$ 或 7 的时候，见 53.2.6 的第六点说明。

这些例子本身也都是相当有意思的。——445，②

允许我们用数字准则来描述，而不是最初的集合论描述（见 50.2.1）。然而，我们看到，这些数字方法能够有多种方式，而且，我们无法肯定所有简单博弈都能够借助这些方法来求解。因此，我们要设计组合论的（集合理论的）方法以系统地枚举全部简单博弈。

事实上，为了理解各种简单博弈，尤其为了弄明白上述数字方法能够带领我们走多远，系统地枚举简单博弈是必不可少的。我们将会看到，只有对于相对大的玩家个数，不那么明显可能的关键例子才会存在①，所以轻描淡写的口头分析不可能十分有效。

51.1.2 我们在 49.6.3 末尾指出过，全部简单博弈的枚举等价于它们的集合 W 的枚举，即 49.6.2 中满足（49:W^*）的集合 W 的枚举。那里，我们还注意到，一个方便的做法是用 W^m（全部最小胜利联盟）取代 W（全部胜利联盟）。

两者都提供全部简单博弈的一个枚举。从概念上说，
W 的使用较好，因为 W 有一个较简单的定义，而 W^m 是借 446
助 W 间接地引入的。就全部简单博弈的实际枚举——我们的当前的目标——而言，W^m 的使用更好，因为 W^m 是一个比 W 小的集合②，从而更容易描述。

我们将依次给出两种方法。你将看到，这些讨论提供了 30.3 中引入的饱和性和饱和概念的自然应用。

---

① $n=6,7$，见 53.2。——445，③

② W、L 是不相交的。根据 48.2.1 中的（48:A:b），它们有相同个数的元素。合起来，它们穷尽 $\bar{I}$ 的 2^n 个元素。因此，W 和 L 都有 2^{n-1} 个元素。W^m 的元素个数是不确定的，但它总是小得多（见 53.1 的第四点说明）。——446，①

51.2 饱和法:借助 W 来枚举

51.2.1 集合 W 由 49.6.2 中的(49:W*)描述,即由(49:W*)中的条件(49:W*:a)—(49:W*:c)描述。

让我们暂时忽略(49:W*:c),只考虑(49:W*)和(49:W*:c)。这两个条件意味着,W 中不存在两个不相交的元素。[①] 换句话说:用 $S\mathscr{R}_1T$ 记二者不相交,即 $S\cap T\neq\ominus$ 的否定。(49:W*:a)和(49:W*:b)意味着 $\mathscr{R}_1$ 满足。[②] 按照这一思路,一个较为严格的说法是:

(51:A) (4:W*:a)和(49:W*:b)等价于 $\mathscr{R}_1$ 饱和。[③]

证明:W 的 $\mathscr{R}_1$ 饱和意味着:

(51:1) S 属于 W 的充分必要条件是,对于 W 的所有 T,$S\cap T\neq\ominus$。

(49:W*:a)和(49:W*:b)意味着(51:1):令 W 满足(49:W*:a)和(49:W*:b)。如果 S 属于 W,那么,我们知道,对于 W 的所有 T 来说,$S\cap T\neq\ominus$。如果 S 不属于 W,那么,根据(49:W*:a),$T=-S$ 属于 W 且 $S\cap T=\ominus$。

(51:1)意味着(49:W*:a)和(49:W*:b):令 W 满足(51:1)。我们以相反的顺序证明(49:W*:a)和(49:W*:b)。

(49:W*:b)的证明:如果 S 满足(51:1)的准则,那

---

① 证明:令 S、T 属于 W,$S\cap T=\ominus$,那么,$-S\supseteq T$,从而,根据(49:W*:b),$-S$ 属于 W,这违背(49:W*:a)。——446,②

② 见 30.3.2 的定义。——446,③

③ 同上。——446,③

么,S 的每个超集也满足。所以,W 包含其元素的超集。

(49:W*:a)的证明:根据上面的论述,$-S$ 不属于 W 的充分必要条件是,$-S$ 的子集都不属于 W,W 的每个 T 不属于 $-S$,或对于 W 的每个 T,$S\cap T\neq\ominus$。根据(51:1),这恰好意味着,S 属于 W。

因此,无论如何,S 和 $-S$ 之中恰好有一个属于 W。

$S\mathscr{B}_1T$ 显然是对称的,因此,我们能够应用 30.3.5 中的(30:G)。①

51.2.2 为了在此基础上讨论(49:W*),我们必须考虑(49:W*:c)。我们能够以两种方式做到这一点。第一种方式有益于以后的比较。 447

(51:B)　　W 满足(49:W*)的充分必要条件是,它是 $\mathscr{B}_1$ 饱和的,且既不包含空集,也不包含一元集。

证明:(49:W*)是(49:W*:a)、(49:W*:b)和(49:W*:c)的合取。根据(51:A),前两个等于 $\mathscr{B}_1$ 饱和。假设(49:W*:a)成立,(49:W*:c)可以被表述为:如果 S 是 I 或一个($n-1$)元集合,那么,$-S$ 就不属于 W。也就是说:$\ominus$和一元集都不属于 W。

第二种方式更为直接有用。

令 V_0 是(49:W*:c)的所有集合——即 I 和 I 的所有

---

① 你会回忆起,我们还在 30.3.5 中假设了 $x\mathscr{B}x$ 一般成立,即这里的 $S\mathscr{B}_1S$ 一般成立。这意味着 $S\neq\ominus$,因此,对于 $S=\ominus$,$S\mathscr{B}_1S$ 不成立。

然而,(49:W*:a)和(49:W*:c)把$\ominus$从 W 中排除,所以,我们可以使用 30.3.2意义上的值域 D,而不用$\dot{I}$(I 的全部子集的系),它等于$\dot{I}-(\ominus)$(I 的非空子集的系)。这使我们避开了 $S=\ominus$。——446,④

$(n-1)$元子集——的系，那么，我们有：

(51:C) V 是满足(49:W*:c)的一个 W 的一个子集，充分必要条件是，$V\cup V_0$ 是 $\mathscr{B}_1$ 满足的。

证明：$W\supseteq V$ 且 W 满足(49:W*)等于说：$W\supseteq V$，W 满足(49:W*:a)和(49:W*:b)——即根据(51:A)，W 是 $\mathscr{B}_1$ 饱和的，即 $W\supseteq V_0$。换句话说：我们正在寻找一个 $\mathscr{B}_1$ 饱和的 $W\supseteq V\cup V_0$，即我们正在探索 $V\cup V_0$ 是否能够扩展为一个 $\mathscr{B}_1$ 饱和集。

现在，我们知道，30.3.5 的(30:G)适用，从而 30.3.5 的最后一部分分析也适用。[1] 这一可扩展性等价于 $V\cup V_0$ 的 $\mathscr{B}_1$ 满足。

51.2.3 我们把(51:C)更为明确地重述如下：

448 (51:D) V 是满足(49:W*)的一个 W 的一个子集，充分必要条件是，它有如下性质：

(51:D:a) V 中不存在不相交的两个 S、T。

(51:D:b) V 既不包含⊖[2]，也不包含一元集。

证明：根据(51:C)，我们必须表明 $V\cup V_0$ 的 $\mathscr{B}_1$ 满足性，即 V 或 V_0 中不存在不相交的两个集合 S、T。

S、T 都属于 V：这与(51:D:a)一致。

S、T 都属于 V_0：两者都有 $\geqq n-1$ 个元素，从而，它们不可能不相交。[3]

---

① 注意：值域 $D=\bar{I}-(\ominus)$（见第 446 页脚注④）是有限的。——447，①

② 关于这一点，见第 446 页脚注④。——448，①

③ 我们正在利用 $2(n-1)>n$，即 $n>2$，即 $n\geqq 3$。这一点应该在一开始的时候就明确说明。不过，这也是一个自然的假设，因为简单博弈[即满足(49:W*)的集合]只有在 $n\geqq 3$ 的时候才存在。（见 49.4 和 49.5。）——448，②

S 和 T 之中的一个属于 V 且另一个属于 V_0：根据对称性，我们可以假设 S 是前者，T 是后者。这样，V 的 S 决不可能不与 I 或任一($n-1$)元集相交。这正是(51：D：b)。

(51：D)解决了枚举全部 W 的问题：从任意一个满足(51：D：a)和(51：D：b)的 V 开始[①]，我们可以将其逐步扩大，直至(51：D：a)和(51：D：b)被违背为止。当这一过程无法继续进行的时候，那么，我们有一个 V，它是 W 的满足(49：*)的最大子集，即我们有一个这样的 W。

在以各种方式进行的这一逐步建立过程中，我们得到问题中所有的 W。

读者可以就 $n=3$ 或 $n=4$ 尝试一下这一过程。你会看到，即便是对于不大的 n，这个过程也相当繁琐，尽管原理上它是严格的并覆盖所有的 n。

51.3 从 W 到 W^m 的理由：使用 W^m 的困难

51.3.1 让我们考虑 49.6 的集合 W^m。

我们希望直接描述这些 W^m，并找到某个简单过程来构造其全部。下面，我们将推出两种不同方法，两者都属于饱和法。第一个方法借助于一个非对称关系，而第二个方法借助于一个对称关系。因此，适合我们的构造目的的是第二个方法，并与 51.2 中 W 的构造类似。

---

① 原理上，我们可以从一个空集开始。读者将会看到，把⊖从 V 中排除(见上)并不影响 $V=$⊖的可能性。——448，③

不过，我们将给出两种描述，因为这一等价性是相当有启发意义的：第一个方法在某些（技术）方面类似于一个解的定义（见 30.3.3 和 30.3.7），从而，从第一个向第二个等价形式的过渡是有意义的，因为它指出了解决这类问题的方法。我们已经在前面（30.3.7 中）提到过对于我们的解的概念来说，这一过渡是多么的重要。

51.3.2 设 W 是一个系，它包含其元素的所有超集：例如，满足（49：W*：b），那么，其最小元素 W^m 组成的系决定着 W：事实上，W 显然是 W^m 的元素的超集组成的系。

因此，如果一个系 V 被给定，且我们正在寻找一个满足（49：W*）的 W，使得 $V=W^m$ 成立，那么，这个 W 必定是 V 的所有元素的超集组成的系 $\tilde{V}$。

因此，对于一个满足（49：W*）的 W 来说，$V=W^m$ 的充分必要条件是 $W=\tilde{V}$ 满足这两个条件。[1] 接下来，我们把 $V=W^m$ 的描述方式转变为饱和型的描述方式。

用 $S\mathscr{R}_2$ 记 $S\cap T=\ominus$ 和 $S\supset T$ 都不成立。那么，我们有：

（51：E）　　对于一个满足（49：W*）的 W，$V=W^m$ 的充分必要条件是，V 是 $\mathscr{R}_2$ 饱和的且既不包含 $\ominus$，也不包含任何一元集。

证明：根据上面的分析，我们只须研究 $W=\tilde{V}$ 是否有要求的性质：

---

[1] 即 $W=\tilde{V}$ 是惟一能够满足这些条件的系，但它也可能不满足这些条件。——448，④

$V = W^m$：令 S 是这个 W 的一个最小元素。那么，对于 V 的某个 T 来说，$S \supseteq T$。所以，T 属于 W，从而 S 是 W 的最小元素排除了 $S \supset T$。故，$S = T$，即 S 属于 V。 449

这样，需要讨论只是相反的性质：是否 V 的每个 S 都真的是 W 的最小元素。V 的任一 S 显然都属于 W，所以，最小意味着不可能有 $S \supset T'$ 且 T' 是 W 的元素，即不可能有 $S \supset T' \supseteq T$ 且 T 是 W 的元素。这意味着不可能有 $S \supset T$，T 是 V 的元素。反过来（令 $T' = T$），不可能有 $S \supset T$ 且 T 是 V 的元素则意味着 S 是 V 的最小元素。所以，我们有如下条件：

(51:2)　　对于 V 中的 S、T，永远不会有 $S \supset T$。

W 满足(49:W*)：我们必须分别考虑(49:W*:a)、(49:W*:b)和(49:W*:c)，但顺序上有所不同。

(49:W*:b)的证明：显然，$W = \tilde{V}$ 包含其元素的所有超集，所以这一条件自动得到满足。

(49:W*:c)的证明：设(49:W*:a)成立。（见下。）那么，(49:W*:c)可以被表述为：如果 S 是 I 或一个 $(n-1)$ 元集，那么 $-S$ 就不属于 W。也就是说，$\ominus$ 和一元集都不会属于 W，即这些集合的子集都不属于 V。这样，我们有

(51:3)　　$\ominus$ 和一元集都不属于 V。

(49:W*:a)：我们分两部分分析：

S' 和 $-S'$ 不会都属于 W：即如果 S、T 属于 V，那么，我们不可能有 $S \subseteq S'$，$T \subseteq -S'$。现在，这一个 S' 的存在性意味着，$S \cap T = \ominus$，而且（令 $S' = S$），$S \cap T = \ominus$ 也意味着 S' 的存在性。这样，我们有：

(51:4)　　对于 V 中的 S、T，永远不可能有 $S \cap T = \ominus$。

S 和 $-S$ 之一必定属于 W：假设 S 和 $-S$ 都不属于 W，那么，这意味着 V 中不存在 T 使 $T\subseteq S$ 或 $T\subseteq -S$，后者意味着 $S\cap T=\ominus$。也就是说，V 中不存在 T 使 $T=S$ 或 $S\supset T$ 或 $S\cap T\ominus$。或者说：S 不属于 V 且 V 中不存在满足 $S\mathscr{R}_2T$ 的否定的 T。[①]

也就是说，S 不属于 V，但 $S\mathscr{R}_2T$ 对 V 中所有的 T 成立。

现在，我们不得不说，这是不可能的：即

(51:5)　　如果 $S\mathscr{R}_2T$ 对 V 的所有 T 成立，那么，S 属于 V。

这样，(51:2)—(51:5)正是我们要找的准则。

现在，(51:2)和(51:4)能够被结合起来：$S\mathscr{R}_2T$ 对 V 的所有 S 和 T 成立。即

(51:6)　　如果 S 属于 V，那么，对于 V 的所有 T，$S\mathscr{R}_2T$。

(51:5)和(51:6)恰好表达的是 V 的 $\mathscr{R}_2$ 饱和。所以，这与(51:3)合起来形成该准则，而且这恰好是我们要证明的。

(51:E)是有意义的，因为它与(51:B)完全相似。W 与 W'' 的不同仅仅在于我们用

$$S\mathscr{R}_2T: S\cap T=\ominus \text{和 } S\supset T \text{ 都不成立}$$

取代了

450 $$S\mathscr{R}_1T: S\cap T=\ominus \text{不成立。}$$

但是，由于我们用不对称的 $\mathscr{R}_2$ 取代了对称的 $\mathscr{R}_1$，我们无

① 这实际上是 $S\supset T$ 或 $S\cap T=\ominus$。——449，①

法再像(51:B)——或(51:A)——中那样利用(51:E)。

51.4　改变后的方法:借助 W^m 的枚举

51.4.1　现在,我们转向第二种方法,即分析如下问题:给定一个系 V,对于一个满足(49:W*)的 W 来说,$V\subseteq W^m$ 意味着什么呢?

$V\subseteq W^m$ 的含义是:V 的每个 S 是 W 的一个最小元素。也就是说,这样一个 S 必须属于 W,但其真子集决不能属于 W。由于 W 满足(49:W*),即包含其元素的超集,我们只要就 S 的最大真超集——即,对于 $S-(i)$,i 属于 S——这么说也就够了。由于 W 满足(49:W*:a),我们可以说 $-[S-(i)]=(-S)\cup(i)$ 属于 W,而不说 $S-(i)$ 不属于 W。这样,我们看到:

(51:F)　　$V\subseteq W^m$[W 满足(49:W*)]恰好意味着:对 V 的每个 S,S 属于 W;而且对于 S 的每个 i,$(-S)\cup(i)$ 属于 W。

接下来,我们要证明的是:

(51:G)　　V 是一个满足(49:W*)的 W 的 W^m 的子集,当且仅当它有如下性质:

(51:G:a)　　V 中不存在不相交的两个 S、T。

(51:G:b)　　V 中不存在 S、T 使 $S\supset T$。

(51:G:c)　　对于 V 的 S、T,$S\cup T=I$ 意味 $S\cap T$ 是一个一元集。

(51:G:d)　　$\ominus$、一元集和 I 都不属于 V。

证明:令 V_1 是全部 $(-S)\cup(i)$ 组成的集合,其中 S 属于 V,i 属于 S。那么,根据(51:F),$V\subseteq W^m$ 意味着,$V\cup V_1$

$\subseteq W$。根据(51:D),如果 $V \cup V_1$ 满足(51:D:a)和(51:D:b),对于满足(49:W*)的某个 W 来说,这是可能的。

因此,让我们就 $V \cup V_1$ 阐述(51:D:a)和(51:D:b)。

(51:D:a)的证明:S、T 都属于 V:这与(51:G:a)相同。

S、T 都属于 V_1:即 $S = (-S') \cup (i)$,$T = (-T') \cup (j)$,S'、T'属于 V,i 属于 S',j 属于 T'。

S 与 T 不相交意味着:$-S'$、$-T'$不相交,即 $S' \cup T' = I$;(i)、(j)不相交,即 $i \neq j$;$-S'$、(j)不相交,即 j 属于 S';$-T'$、(i)不相交,即 i 属于 T'。

总之:$S' \cup T' = I$;i、j 是同时属于 S'、T'的两个不同元素,即 $S' \cap T'$的两个不同元素。

451 现在,我们必须说这是不可能的。也就是说,如果 $S' \cup T' = I$,那么,$S' \cap T'$不可能有两个不同的元素。根据(51:G:a),$S' \cap T'$不可能是空集,这意味着,它只能是一元集。

这就得到了(51:G:c)(这里的 S'、T'取代了 S、T)。

S、T 之中的一个属于 V 且另一个属于 V_1:根据对称性,我们可以假设,S 是前者,T 是后者。这样,$T = (-T') \cup (j)$,T'属于 V,j 属于 T'。S 与$(-T') \cup (j)$不相交意味着 S、$-T'$不相交,即 $S \subseteq T'$;S、(j)不相交,即 j 不属于 S。

总之:$S \subseteq T'$,j 属于 T'但不属于 S。

现在,我们必须说这是不可能的,即没有 $S \subset T'$。这就得出了(51:G:b)。(这里的 T'、S 取代了 S、T。)

(51:D:b)的证明:$\ominus$和一元集都不属于 V,也不属于 V'。后者意味着,它们都不属于$(-S) \cup (i)$,其中 S 属于

V,i 属于 S。只有一个一元集才能成为这样的$(-S)\cup(i)$,而且这意味着:$-S=\ominus$,即 $S=I$。

总之:$\ominus$、一元集和 I 都不属于 V。这与(51:G:d)一致。

因此,我们恰好得出了条件(51:G:a)—(51:G:d)。

就像(51:D)解决了有关 W 的相应问题那样,(51:G)解决了枚举全部 W^m 的问题:从任一满足(51:G:a)—(51:G:d)的 V 开始①,在不破坏(51:G:a)—(51:G:d)的情况下,我们尽可能逐步扩大它。当这一过程无法继续下去时,我们有一个 V,它是满足(49:W*)的一个 W 的 W^m 的子集中最大的一个,即我们有这样一个 W^m。

在以各种方式逐步完成这一过程时,我们得到问题中的全部 W^m。

51.4.2 上面的说法表明,全部简单博弈的实际枚举能够建立在(51:G)的基础上,而且在第 52 节中,我们就是这么做的。不过,我们最好首先进行一些其他的分析。

接下来,我们要略微详细分析的一个断言是,(51:G)是更接近饱和型的一个条件。

首先要看到的是,由于(51:G:b)涉及的是 V 中任意两个 S、T,因此我们能够在(51:G:b)对换它们。也就是说,我们能够把(51:G:b)换为:

(51:G:b*)　　V 中不存在两个集合 S、T,使 $S\supset T$ 或 $S\subset T$。

用 $S\mathscr{R}_3T$ 记 S、T 满足(51:G:a)、(51:G:b*)和

① 原理上,我们从空集开始。——451,①

(51:G:c),即如果 $S\cap T$ 不是一个一元集,那么,$S\cap T=\ominus$,$S\supset T$,$S\subset T$ 和 $S\cup T=I$ 都不成立。

因此,(51:G)简单说明了 V 是 $\mathscr{R}_3$ 饱和的。现在,令 D 是满足(51:G:d)的 I 的子集组成的系 $\bar{\bar{I}}$,即$\ominus$、一元集和 I 都不属于它。

那么,51.4.1 的最后一点说明证明,W 是 $\bar{\bar{I}}$ 的最大 $\mathscr{R}_3$ 满足子集。

452 显然,$S\mathscr{R}_3T$ 是对称的。[①] 所以,我们可以应用 30.3.5 的(30:G)。这给出:

(51:H) 对于一个满足(49:W*)的 W,$V=W^{m}$ 的充分必要条件是,(在 $\bar{\bar{I}}$ 中)V 是 $\mathscr{R}_3$ 饱和的。

(51:E)与(51:H)告诉我们,我们成功地从不对称的 $\mathscr{R}_2$ 过渡到了对称 $\mathscr{R}_3$,兑现了我们在第 271 页脚注①中许下的诺言。

51.4.3 51.3.2 中的 $\mathscr{R}_2$ 与我们现在的 $\mathscr{R}_3$ 的比较是很有启发意义的:

$S\mathscr{R}_2T$:$S\cap T=\ominus$,$S\supset T$ 都不成立。

$S\mathscr{R}_3T$:如果 $S\cap T$ 不是一个一元集,那么,$S\cap T=\ominus$,$S\supset T$,$S\subset T$,$S\cup T=I$ 都不成立。

$\mathscr{R}_2$ 的对称性(见 30.3.2)给出 $\mathscr{R}_3$ 的前三个部分,但不给出最后一个。最后一个部分是(51:G)和(51:H)的成就,且与另外三个没有任何明显联系。

---

① 而且,在 $\bar{\bar{I}}$ 中,$S\mathscr{R}_3S$ 成立:只有 $S=\ominus$时,才有 $S\cap S=\ominus$,永远不会有 $S\supset S$,$S\cup S=I$ 只有在 $S=I$ 时才成立,所以,对于$\bar{I}$的一个 S,这些事情都不会发生。——452,①

你能够由此推测，即便 30.3.7 的计划的确可行，使其得以实现的运算也必定是十分玄妙的。

51.5　简单博弈与分解

51.5.1　接下来，我们要分析的是简单博弈与分解之间的联系。

假设 Γ 是一个可分解博弈，它有成分博弈 Δ、H（J、K 是 I 中的互补集合）。那么，我们要回答的问题是：对于 Δ、H 来说，Γ 是简单博弈意味着什么呢？

让我们首先确定集合 W、L。因为我们必须就 Γ、Δ、H 这三个博弈来分析，有必要指明依附关系。所以，我们写 $W_\Gamma, L_\Gamma; W_\Delta, L_\Delta; W_H, L_H$。

另外，我们还假设 Γ、Δ、H 既不是本质博弈，也不是正规化的博弈。不过，假设它们都是零和博弈有方便之处。①

(51:I)　　$S = R \cup T(R \subseteq J, T \subseteq K)$ 属于 $W_\Gamma[L_\Gamma]$，其充分必要条件是，T 属于 $W_\Delta[L_\Delta]$ 且 T 属于 $W_H[L_H]$。

证明：把 S 换成其（在 I 中的）补集 $I - S$②，把 R 和 T 分别换成它们（在 J、K 中）的补集。这一变换等于用 L_Γ、L_Δ、L_H 替换 W_Γ、W_Δ、W_H。因此，我们关于 W 的说法就意味着关于 L 的一个说法，反之亦然。下面，我们来证明后者。 453

① 回想 46.10 的讨论，读者也许想知道（Γ、Δ、H 中的）剩余（e_0、$\bar{\varphi}$、$\bar{\psi}$）的问题如何解决。这一个问题将在 51.6 中得到澄清。——452，②

② 由于我们要计算不同集合中的补集，我们写成这样的形式，而不写 $-S$、$-R$ 和 $-T$。——452，③

S 属于 L_Γ 表达为

(51:7) $$v(S) = \sum_{i属于S} v[(i)]$$

由于 Δ、H 是 Γ 的成分博弈，我们有 $v(S)=v(R)+v(T)$。所以，我们能够把(51:7)写成：

(51:8) $$v(R)+v(T) = \sum_{i属于R} v[(i)] + \sum_{i属于T} v[(i)]。$$

R 属 L_Δ 和 T 属于 L_H 分别表达为

(51:9) $$v(R) = \sum_{i属于R} v[(i)],$$

(51:10) $$v(T) = \sum_{i属于T} v[(i)]。$$

如此，我们要证明的命题是(51:7)与(51:9)且(51:10)之间的等价性。

显然，(51:9)和(51:10)意味着(51:7)。反过来，由于总有

$$v(R) \geqq \sum_{i属于R} v[(i)],$$

$$v(T) \geqq \sum_{i属于T} v[(i)]$$

(51:7)也意味着(51:9)和(51:10)。[见 31.1.4 中的(31:2)。]

51.5.2 现在，我们能够证明：

(51:J) Γ 是简单博弈的充分必要条件是：其两个成分博弈 Δ、H 中的一个是简单博弈，另一个是非本质博弈。

证明：该条件是必要条件：Γ 是简单博弈意味着：

(51:11) 对任意 $S \subseteq I$，下述两个命题中有且只有一个成立：

(51:11:a)　　S 属于 W_{Γ}。

(51:11:b)　　S 属于 L_{Γ}。

令 $S=R\cup T(R\subseteq J,T\subseteq K)$ 并把(51:I)应用于(51:11)。结果是:

(51:12)　　对于任意 $R\subseteq J,T\subseteq K$,下述两个命题中有且只有一个成立:

(51:12:a)　　R 属于 W_{Δ} 且 T 属于 W_{H}。

(51:12:b)　　R 属于 L_{Δ} 且 T 属于 L_{H}。

现在,令 $R=\ominus,T=K$,那么,R 属于 L_{Δ} 且 T 属于 W_{H}。 454
从而,由(51:12:a),W_{Δ} 与 L_{Δ} 有一个共同元素 R;而且,由(51:12:b),W_{H} 与 L_{H} 有一个共同元素 T。根据 49.3.3 中的(49:E)(将其运用于 Δ、H),前者意味着,Δ 是非本质博弈;后者意味着,H 是非本质博弈。

故,我们有:

(51:13)　　如果 Γ 是简单博弈,那么,Δ、H 之一是非本质博弈。

该条件是充分条件:根据对称性,我们假设 H 是非本质博弈,那么,49.3.3 中的(49:E)(将其运用于 H)表明,每个 $T\subseteq K$ 同时属于 W_{H} 和 L_{H}。所以,我们能够重新表述(51:12)所描述的 Γ 的简单性。

(51:14)　　对于任意 $R\subseteq J$,下述两个命题中有且只有一个成立:

(51:14:a)　　R 属于 W_{Δ}。

(51:14:b)　　R 属于 L_{Δ}。

这正是 Δ 的简单性的表述。所以,我们有

(51:15)　　如果 H[Δ]是非本质博弈,那么,Γ 的简

单性等价于 Δ[H]的简单性。

(51:13)与(51:15)结合起来就完成了(51:J)的证明。

51.6 非本质博弈、简单博弈和博弈的分解:剩余的处理

51.6 下面,我们要把(51:J)与 46.1.1 的(46:A:c)进行比较。在(46:A:c)中,我们发现,一个可分解博弈是一个非本质博弈的充分必要条件是,其两个成分博弈都是非本质博弈,即在分解这一运算下,非本质性具有遗传性。简单性却不具有遗传性。正如我们知道的那样,简单博弈是本质博弈的最简单形式:根据(51:J),如果一个可分解博弈的两个成分是可分解的,那么,该博弈就不是简单博弈。(51:J)表明,一个简单博弈 Δ 在分解运算下仍然是简单博弈的充分必要条件是,它与一个非本质博弈 H 结合,即与一组"哑玩家"结合(见第 340 页脚注①)。

这里,我们给出四点补充说明:

第一:如果简单博弈 Γ 如上所述得自(简单)成分博弈 Δ 加上一组"哑玩家"(即非本质博弈 H),那么,Γ 的解可直接得自 Δ 的解。事实上,这正是 46.9 所详细描述的内容。[①]

第二:我们在 49.7 的开头指出,对于简单博弈,我们

---

① 当然,这也是常识。分解理论的内容——尤其见 46.11 中的概要——表明,忽视严格结果是不可靠的。在这种情况下,46.9 提供坚实的基础。——454,①

使用旧的理论形式。因此，值得注意的是，我们得出的分解类型（见上面的说明）恰好是使旧理论形式具有遗传性的那种类型。（见 46.9 末尾或 46.10.4 中第一点说明。）

第三：这里，为什么我们避免就简单博弈分析非零剩余的情况——即 44.7 意义上的新理论形式——也就变得更为清楚了。 455

事实上，假如我们能够成功完成这一工作，那么，46.6 和 46.8 的结果就能够使我们处理简单博弈的所有分解。现在，我们看到，简单博弈的一个分解不是一个简单博弈。换句话说，具有一般剩余的简单博弈理论会间接地包含着非简单博弈。因此，我们无法继续下去而不失去一般性，这不足为奇。①

第四：根据 46.10 的分析，上述有关剩余的说明有着如下意义：它们表明，简单博弈概念经不起嵌入这一一般运算。② 这表明，46.10.5 中考虑的方法论原理无法在所有条件下都得到应用。

51.7　W^m 意义上的可分解性准则

51.7.1　我们在 51.5 中讨论了什么时候一个可分解博弈是简单博弈。现在，我们要对付的是相反的问题：什么时候一个简单博弈是可分解的。

---

① 从某种意义上说，这可以被视为第 270 页脚注③中提到的方法论原理的一个应用。——455，①

② 除非如上面讨论过的那样，这一运算只是加上“哑玩家”。——455，②

给定一个简单博弈 Γ。一个重要的概念是：I 的 i 是一个显著玩家(significant)，当且仅当它属于 W^m 的某个 S。[1] 用 I_0 记 I 的全部显著元素组成的集合，它是 W^m 中全部 S 的并集。

下面，我们将分若干步骤进行：

(51:K)　　如果 Γ 是简单且可分解博弈，而且其简单成分博弈是 Δ[见(51:J)并使用 51.5 的记号]，那么，Γ 和 Δ 有相同 W^m。

证明：根据(51:1)，W^m 的 $S=R\cup T(R\subseteq J, T\subseteq K)$ 中取 W_Δ 的任意 R，W_H 的任意 T。由(51:J)，H 是非本质博弈，因此 W_H 的 T 是任意 $T\subseteq K$[见(51:J)的证明]。所以，如果 R、T 是最小的，那么，$S=R\cup T$ 是最小的，即它属于 W_Γ^m。这意味着，R 属于 W_Γ^m 且 $T=\ominus$，即 $S=R$。

因此，W_Γ^m 与 W_Δ^m 一致，即 Γ 和 Δ 有相同的 W^m。

(51:L)　　(51:K)中的相同假设下，必有 $J\supseteq I_0$。

证明：根据(51:K)，Γ 和 Δ 有相同的 W^m，所以，相同显著元素——形成 I_0 的 Γ 的那些元素——全部是 Δ 的参与者，他们形成集合 J。

456 (51:M)　　假设 Γ 是简单博弈，那么，I_0 是一个裂集，[2] I_0 - 成分博弈 Δ 是简单博弈，且 $(I-I_0)$ - 成分博弈 H 是非本质博弈[见(51:J)]。

---

① 如果存在一个最小胜利联盟，玩家 i 属于该联盟，那么，玩家 i 就是一个显著玩家。也就是说，他提供的服务是必不可少的。

我们将会看到，与此相对立的"哑玩家"(见 51.7.3)。

当然，所有这些都指简单博弈。——455，③

② 定义见 43.1。——456，①

证明：考虑集合 $S=R\cup T, R\subseteq I_0, T\subseteq I-I_0$，那么，

(51:16)　　S 属于 W 的充分必要条件是 R 属于 W。

事实上：如果 R 属于 W，那么，$S\supseteq R$ 也属于 W。相反：令 S 属于 W，那么，W 中一个满足 $T\subseteq S$ 的最小的 T 存在。这样，T 属于 W^m，T 的每个 i 属于 I_0，从而 $T\subseteq I_0$。因此，$T\subseteq S\cap I_0=R$，从而 R 与 T 同属于 W。

(51:17)　　T 属于 L。

事实上：用 $T(\subseteq I-I_0)$ 替换 S。这是用$\ominus$、T 替换我们的 R、T。由于$\ominus$属于 L，(51:16) 允许我们得出 T 属于 L。

接下来，我们要证明：

(51:18)　　$\mathrm{v}(S)=\mathrm{v}(R)+\mathrm{v}(T)$。

分别考虑 L 的 S 和 W 的 S：

S 属于 L：$R, T\subseteq S$ 也属于 L。所以，

$$\begin{aligned}\mathrm{v}(S) &= \sum_{i\text{属于}S}\mathrm{v}[(i)] \\ &= \sum_{i\text{属于}R}\mathrm{v}[(i)]+\sum_{i\text{属于}T}\mathrm{v}[(i)]=\mathrm{v}(R)+\mathrm{v}(T),\end{aligned}$$

即(51:18)。

S 属于 W：根据(51:16)和(51:17)，R 属于 W 且 T 属于 L。所以，

$$\begin{aligned}\mathrm{v}(S) &= -\sum_{i\text{不属于}S}\mathrm{v}[(i)], \\ \mathrm{v}(R) &= -\sum_{i\text{不属于}R}\mathrm{v}[(i)]=-\sum_{i\text{不属于}S}\mathrm{v}[(i)]-\sum_{i\text{属于}T}\mathrm{v}[(i)], \\ \mathrm{v}(T) &= \sum_{i\text{属于}T}\mathrm{v}[(i)],\end{aligned}$$

从而，

$$\mathrm{v}(S)=\mathrm{v}(R)+\mathrm{v}(T)。$$

即(51:18)。

(51:18)恰好说明,I_0 是一个裂集。对于所有的$T \subseteq I - I_0$,(51:17)给出

$$\mathrm{v}(T) = \sum_{i\text{属于}T} \mathrm{v}[(i)],$$

从而,$I - I_0$ 成分博弈 H 是非本质博弈。所以,根据(51:J),I_0 成分博弈 Δ 必定是简单博弈。

证明完成。

457 **51.7.2** 现在,我们能够全面描述一个简单博弈 Γ 的可分解性了,即我们能够指出其 43.3 意义上的分解分拆 Π_Γ。

(51:N) 与(51:M)中的假设相同:分解分拆 Π_Γ 由集合 I_0 和一元集(i)(i 属于 $I - I_0$)组成。

证明:对于 i 属于 $I - I_0$,(i) 属于 Π_Γ:根据(51:M),$I - I_0$是 Γ 的一个裂集,有一个非本质成分博弈 H。因此,对于属于 $I - I_0$ 的每个 i,(i)是 H 的一个裂集[见 43.4.1 中的(43:J)],从而是 Γ 的一个裂集[见 43.3.1 中的(43:D)]。作为一个一元集,(i)必然是最小的。所以,它属于 Π_Γ。

I_0 属于 Π_Γ:根据(51:M),I_0 是一个裂集。如果 J 是一个非空的裂集,那么,把(51:L)应用于 J 或 $I - J$,要么 $J \subseteq I_0$,要么 $I - J \subseteq I_0$,$I_0 \cap J = \ominus$。上述两种情况都不允许 $J \subset I_0$。因此,I_0 是最小的,从而属于 Π_Γ。

不会再有其他的 J 属于 Π_Γ:Π_Γ 的任何其他的 J 必定与 I_0 不相交,且不与(i)(i 属于 $I - I_0$)相交[利用 43.3.2 中的(43:F)]。由于这些集合的并集是 I,这必然要求 $J = \ominus$,而$\ominus$不是 Π_Γ 的一个元素(见 43.3.2 开头)。

证明完成。

51.7.3 把 43.4.1 中的(43:K)与(51:N)结合起来给出:①

(51:O)　　一个简单博弈 Γ 是不可分解的,当且仅当 $I_0 = I$,即当且仅当其全部参与者都是显著的。

我们通过证明得出:

(51:P)　　一个简单博弈 Γ 恰好有一个 J 成分,它是简单的和不可分解的,并有 $J = I_0$。

证明:I_0 成分博弈能够根据(51:M)建立起来且是一个简单博弈。

现在,考虑一个简单 J 成分博弈。根据(51:K),它与 Γ 有相同的 W^m 和相同的显著元素,从而后者形成 I_0。根据(51:O),J 成分博弈等价于 $J = I_0$。

我们称 Γ 的 I_0 成分博弈 Δ_0 为其核(kernel)。所有其他参与者——即 $I - I_0$ 的元素——是"哑玩家"。[见(51:M)或(51:N),以及 43.4.2 的最后一部分。]所以,在博弈 Γ 中,重要的事情都发生在它的核 Δ_0 之内。要理解这一点,只需应用 51.6 中的第一点说明。

52. n 较小时的简单博弈

52.1 $n = 1,2,3$ 的情况

52.1 我们的下一个目标是就 n 的较小取值枚举所

① 或直接将 43.4.1 中的(43:K)与(51:L)和(51:M)结合起来。——457,①

有简单博弈。我们准备将这一决疑论式的分析进行到得到50.2、50.7.2和50.8.2中提到的例子(分别见第434
458 页脚注②,第443页脚注②、③、④,第445页脚注①、②)所需要的程度。

由于每个简单博弈都是本质博弈,我们只需考虑$n\geqq3$的情况。

$n=3$的情况是:(惟一的)本质三人博弈是简单的,而且它有记号$[1,1,1]_h$。①

所以,我们能够假设,从今以后,$n\geqq4$。

52.2 $n\geqq4$时的二元集及其在W^m分类中的作用

52.2.1 给定$n\geqq4$。我们希望就这个n枚举全部简单博弈。为此,我们要引入另一个博弈分类原则,对于n的较小取值来说,该分类原则十分有效。

问题中的枚举等于集合W^m的枚举,对此,我们有可供利用的特征——如51.4.1中(51:G)就是一个。

考虑有可能属于W^m的最小集合。由于(51:G:d)把空集和一元集排除在W^m之外,这意味着,我们要考虑的是W^m中的二元集。这些集合具有如下性质:

(52:A) 一个二元集属于W^m的充分必要条件是,它属于W。②

证明:必要性是显然的。下面,让我们假设二元集S属于W。S的真子集是空集或一元集,从而不属于W。因

---

① 见50.1.1中的(50:A)以及50.2.2的最后一点说明。——458,①

② 即W中的一个不是最小集合的集合至少有三个元素。——458,②

此，S 属于 W^m。

我们按照 W^m 中的二元集进行分类。

52.2.2　可以设想，W^m 有可能根本没有二元集。我们用 C_0 记这一可能情况。

另一种可能性是，W^m 恰好包含一个二元集。通过玩家 $1,\cdots,n$ 的置换，我们能够使这一集合是(1,2)。我们用 C_1 记这一可能情况。

另外，W^m 可能包含两个或更多二元集。考虑其中的两个。根据(51:G:a)，它们必定有一个共同元素。通过玩家 $1,\cdots,n$ 的置换，我们能够使这个元素是 1，且这两个集合的另外两个元素分别是 2 和 3。

这样，W^m 包含(1,2)和(1,3)。

我们用 C_2 记 W^m 不再包含其他二元集的情况。

52.2.3　现在，假设 W^m 的确包含其他二元集，并进一步假设并非其中的每一个都包含元素 1。

因此，考虑一个不包含元素 1 的 W^m 的一个二元集。根据(51:G:a)，它必定与(1,2)和(1,3)有共同元素，加之元素 1 已经被排除，这些共同元素必定是 2 和 3，因此该集合必定是(2,3)。

所以，(1,2)、(1,3)、(2,3)属于 W^m。(就此而言，我们有关于 1、2、3 的完全对称性。) 459

接下来，考虑有可能属于 W^m 的其他二元集。它不可能包含 1、2、3 中的全部。通过玩家置换，我们能够做到该集合不能包含 1。它必须与(1,2)、(1,3)有共同元素，加之 1 已经被排除，这些元素只能是 2 和 3，所以该集合必定是(2,3)，但我们已经假设它不同于(2,3)。

所以，W^m 包含二元集(1,2)、(1,3)和(2,3)且不再包含其他二元集。我们用 C^* 记这种情况。

52.2.4 余下的一种可能性是，W^m 包含不同于(1,2)、(1,3)的二元集，但它们都包含1。

通过玩家 $4,\cdots,n$ 的置换，我们能够使这些玩家是 $4,\cdots,k+1,k=3,\cdots,n-1$。

因此，W^m 包含二元集(1,2)，(1,3)，(1,4)，…，(1,$k+1$)且不再包含其他二元集。我们用 C_k 记这种情况。

52.2.5 为了方便，我们把52.2.2的 C_0、C_1、C_2 和52.2.4的 $C_k(k=3,\cdots,n-1)$ 放在一起：这样，我们有如下情况：

$$C_k,\quad k=0,1,\cdots,n-1。$$

在情况 C_k 中，W^m 包含二元集(1,2)，…，(1,$k+1$)且不再包含其他二元集。通过置换玩家 $1,\cdots,n$[①]，我们能够用$(1,n),\cdots,(k,n)$取代这些集合。

我们要使用正是 C_k 的这种形式，$k=0,1,\cdots,n-1$。现在，C_k 包含二元集$(1,n),\cdots,(k,n)$且不再包含其他二元集。

C_k 之外的惟一情况是52.2.3的 C^*，我们将不对其进行转换。

52.3 情况 C^*、C_{n-2}和 C_{n-1}的可分解性

52.3.1 在这些可能情况中，三种情况能够直接被解

---

① 即$\begin{pmatrix}1,2,3,\cdots,n\\ n,1,2,\cdots,n-1\end{pmatrix}$，见28.1.1。——459，①

决：C^*、C_{n-2}和 C_{n-1}。下面，我们按与此不同的循序讨论这些情况。

情况 C^*：考虑一个 $S\subseteq I$。如果 S 包含 1、2、3 中的两个或更多，如（至少是）1、2，那么，$S\subseteq(1,2)$。$(1,2)$ 属于 W，从而 S 也属于 W。如果 S 包含 1、2、3 中的一个或更少，如（至多）1，那么，$S\subseteq-(2,3)$。$(2,3)$ 属于 W，$-(2,3)$ 属于 L，从而 S 也属于 L。所以，我们看到：W 恰好由这样的 S 组成，它们包含 1、2、3 中的两个或更多。因此，W^m 恰好由 $(1,2)$、$(1,3)$ 和 $(2,3)$ 组成。① 故，对于这一博弈来说，$(1,2,3)$ 是 51.7 的 I_0。

换句话说：该博弈的核是一个有参与者 1、2、3 的三人博弈，其 W^m 由 $(1,2)$、$(1,3)$ 和 $(2,3)$ 组成。正如我们在前面提到的那样（最后一次是 52.1 中），这个博弈有记号 $[1,1,1]_h$。其余 $n-3$ 位玩家，4，…，n 是"哑玩家"。

这样，我们看到： 460

情况 C^* 恰好由一个博弈代表：三人博弈 $[1,1,1]_h$，$(n-3)$ 个"哑玩家"。

52.3.2 情况 C_{n-1}：考虑一个 $S\subseteq I$。首先，假设 n 属于 S。如果 S 没有其他元素，那么，它是一元集 (n)，且属于 L。如果 S 有其他元素，如 $i=1,\cdots,n-1$，那么，$S\supseteq(i,n)$。现在，(i,n) 属于 W，从而，S 也属于 W。换句话说：如果 n 属于 S，那么，S 属于 W，除非 $S=(n)$。将这一

① 按照定义，这些是 W^m 的二元集，但我们已经证明了，它们完全穷尽了 W^m。——459，②

结果运用于 $-S$ 给出：如果 n 不属于 S，那么，当 $-S$ 不属于 W 时，即当且仅当 $-S=(n)$，即 $S=(1,\cdots,n-1)$ 时，S 属于 W。

所以，W 恰好由这样一些 S 组成：除 (n) 这个最小的集合之外，包含 n 的所有集合；除 $(1,\cdots,n-1)$ 这个最大的集合之外，不包含 n 的集合。不难验证，这个 W 的确满足条件(49:W*)。还有，这一博弈能够被描述为一个加权多数博弈，玩家 $1,\cdots,n-1$ 有相同权重，而玩家 n 有 $n-2$ 倍权重。也就是说，这个博弈有记号 $[1,\cdots,1,n-2]_h$。

W^m 可直接得自 W。它恰好由这样一些 S 组成：$(1,n),\cdots,(n-1,n)$ 和 $(1,\cdots,n-1)$。① 现在，不难验证，这个博弈是一个齐次正规博弈，$a=1$。也就是说，对于这个 W^m 中的所有 S 来说，$s_S=1$（见 50.2）。所以，我们能够写 $[1,\cdots,1,n-2]_h$。

这样，我们看到：

情况 C_{n-1} 恰好由一个博弈代表：n 人博弈 $[1,\cdots,1,n-2]_h$。

52.3.3 情况 C_{n-2}：考虑一个 $S\subseteq I$。首先，假设 n 属于 S。如果 S 没有 $n-1$ 之外的其他元素，那么，$S\subseteq(n-1,n)$。现在，$(n-1,n)$ 不属于 W^m，从而［根据 52.2.1 中的(52:A)］不属于 W。所以，S 与 $(n-1,n)$ 同属于 L。

---

① 因此，W^m 中的二元集是 $(1,n),\cdots,(n-1,n)$，这是由其定义决定的。一个新的事实是，W^m 的惟一一个其他元素是 $(1,\cdots,n-1)$。

请注意，最后一个集合只有在 $n\geq 4$ 的情况下才不是二元集。——460，①

如果 S 有不同于 $n-1$ 的其他元素，如 $i=1,\cdots,n-2$，那么，$S\supseteq(i,n)$。现在，这个 (i,n) 属于 W，从而 S 也属于 W。这样，我们看到：如果 n 属于 S，那么，S 属于 W，除非 $S=(n)$ 或 $(n-1,n)$。将此运用于 $-S$ 给出：如果 n 不属于 S，那么，当 $-S$ 不属于 W 时，即当且仅当 $-S=(n)$ 或 $(n-1,n)$，即 $S=(1,\cdots,n-1)$ 或 $(1,\cdots,n-2)$ 时，S 属于 W。

因此，W 恰好由这样一些 S 组成：除 (n) 或 $(n-1,n)$ 之外，所有包含 n 的集合；除 $(1,\cdots,n-1)$ 和 $(1,\cdots,n-2)$ 之外的不包含 n 的集合。不难验证，这的确满足条件 (49:W*)。

W^m 可直接得自 W。它恰好由这样一些 S 组成：$(1,n),\cdots,(n-2,n)$，以及 $(1,\cdots,n-2)$。[①] 所以，对于该博弈来说，$(1,\cdots,n-2,n)$ 是 51.7 的 I_0。

换句话说：该博弈的核是一个 $(n-1)$ 人博弈，其参与者是 $1,\cdots,n-2,n$，其 W^m 由 $(1,n),\cdots,(n-2,n)$，$(1,\cdots,n-2)$ 组成。因此，这是 $n-1$ 位玩家时的情况 C_{n-2}，类似于 n 位玩家时的情况 C_{n-1}（用 $n-1$ 替换 n!）。所以，它有记号 $[1,\cdots,1,n-3]_h$。玩家 $n-1$ 是一个“哑玩家”。 461

这样，我们看到：

---

① 因此，W^m 中的二元集是 $(1,n),\cdots,(n-2,n)$，这是由其定义决定的。一个新的事实是，W^m 的惟一一个其他元素是 $(1,\cdots,n-2)$。

对于 $n=4$，这最后一个集合也是一个二元集，从而使这类博弈不那么纯粹了。（它变成了 C^*，而不是 C_{n-2}，即 C_2。）——460，②

情况 C_{n-2} 恰好由一个博弈代表:[①]有一个哑玩家的 $(n-1)$ 人博弈 $[1,\cdots,1,n-3]_h$。

52.4 (有哑玩家的)不同于 $[1,\cdots,1,l-2]_h$ 的简单博弈:C_k, $k=0,1,\cdots,n-3$

52.4 52.3 的结果值得进一步分析和重新阐述。我们看到,对于每个 $l\geqq 4$,l 位玩家的齐次加权多数博弈 $[1,\cdots,1,l-2]_h$ 能够被建立起来。[②] 我们甚至能够就 $l=3$ 建立它:它是 3 位参与者的直接多数博弈 $[1,1,1]_h$。所以,我们将对 $l\geqq 3$ 使用上述表述。

如果 $n\geqq 4$,那么,我们能够通过对任一 $l=3,\cdots,n$ 建立 $[1,\cdots,1,l-2]_h$ 并加上必要个数的哑玩家来得到一个简单 n 人博弈。52.3 的结果是:$l=3$,n 和($n\geqq 5$ 时)$n-1$ 穷尽了情况 C^*、C_{n-1} 和 C_{n-2}。

有关这一结果的一件奇怪的事情是,l 的这些值并没有穷尽其可能取值 $l=3,\cdots,n$(见上)。也就是说,当 $n=4,5$ 时,它们是这样,但 $n\geqq 6$ 时则不是这样。当 $n\geqq 6$ 时,余下未取到的值是 $l=4,\cdots,n-2$。它们的意义是什么呢?

答案是:考虑博弈 $[1,\cdots,1,l-2]_h$(l 位玩家)有 $n-l$ 个"哑玩家"。假设 $l=3,\cdots,n$ 且 $n\geqq 4$。W^m 由 $(1,l),\cdots,(l-1,l)$ 和 $(1,\cdots,l-1)$ 组成。[③] 因此,我们有 $l=3$ 时的情

---

① $n\geqq 5$。避免 $n=4$ 的情况。见第 460 页脚注②。——461,①

② 见上面的情况 C_{n-1},用 l 替换 n。——461,②

③ 我们把玩家 $1,\cdots,l$ 当作核 $[1,\cdots,1,l-2]_h$ 的参与者,取玩家 $l+1,\cdots,n$ 为"哑玩家"。这不同于 52.3 的情况 C_{n-1} 中的排列——那里,$l=n-1$ 且玩家 $n-1$ 是"哑玩家"。两者相差玩家 $n-1$ 与 n 的交换。——461,③

况 C^* 和 $l=4,\cdots,n$ 时的情况 C_{l-1}。① 因此，在这些博弈中，我们有来自情况 $C^*,C_3,\cdots,C_{n-1}$ 的典型。52.3 的结果能够被重新表述为：情况 C^*、C_{n-2} 和 C_{n-1} 被这些博弈中若干贴切的博弈穷尽。②

我们将这一结论重述为：

(52:B)　　我们希望枚举 $n\geqq 4$ 的全部 n 人博弈。博弈 $[1,\cdots,1,l-2]_h$（l 位玩家）加上 $(n-l)$ 个“哑玩家”是一个简单 n 人博弈，$l=3,4,\cdots,n$。其情况分别是 $C^*,C_3,\cdots,C_{n-1}$。其他简单 n 人博弈（如果有的话）属于情况 C_0，$C_1,\cdots,C_{n-3}$。③ 462

52.5　$n=4,5$

52.5.1　我们将详细讨论 $n=4,5$ 的情况，并讨论 $n=6,7$ 时的几个典型例子。

$n=4$ 的情况很容易解决。根据 (52:B)，我们只需研究 C_0,C_1。在这些情况下，W^m 包含 $\leqq 1$ 个二元集。然而，这是不可能的：因为一个二元集的补集是一个二元集，补集的个数必然等于 W 中二元集的个数且属于 L。这一个数是总数的一半，即 6。所以，W 包含三个二元集，且 W^m

---

① 对于 $l=3$，C^* 取代了 C_2，因为在这种情况下 $(1,\cdots,l-1)$ 是一个二元集。——461，④

② 当 $n\leqq 4$ 时，C_2 是空集，因为它发生在第一个列举，而不出现在第一个列举。见 52.3。——461，⑤

③ 到目前为止，我们成功穷尽枚举这些情况要么被避开了，要么恰好包含一个博弈。然而，一般来说，情况并非如此。见 53.2.1 中的第一点说明。——462，①

也包含三个二元集。①

因此，$n=4$ 时惟有的简单博弈是(52:B)的那些博弈。我们将这一结果表述为：

(52:C) 不考虑在四人以下简单博弈②的基础上通过增加哑玩家而得到的博弈，恰好存在一个简单四人博弈：$[1,1,1,2]_h$。

52.5.2 接下来，我们考虑 $n=5$ 的情况。根据(52:B)，我们必须研究 $l=0,1,2$ 的情况。与 $n=4$ 的情况相比，这些值都代表着具体的可能性。

C_0：W^m 即 W 中没有二元集。所以，它们都属于 L，而且它们的补集——三元集——都属于 W。因此，W 由至少三个元素的集合组成，而 W^m 由三元集组成。因此，这正是多数博弈$[1,1,1,1]_h$。

C_1：(1,2)是 W^m 即 W 中仅有的一个二元集。过渡到其补集：(3,4,5)是 L 中仅有三元集，即其他集合都属于 W。因此，W 恰好由这样一些集合组成：(1,2)和(3,4,5)之外的全部三元集，全部四元集和五元集。不难验证，这满足(49:W*)，而且其 W^m 恰好由下列集合组成：

(1,2)，(a,b,c)，其中 a=1,2，b,c=3,4,5 中的任意两个。

现在，不难证明，这个博弈有记号$[2,2,1,1,1]_h$。

C_2：(1,2)、(1,3)是 W^m 即 W 中仅有的二元集。过渡

① 见52.2.1中的(52:A)。在下面的讨论中还将用到这一结果，不再说明。——462,②

② 即惟一的简单三人博弈$[1,1,1]_h$。——462,③

到其补集：(3,4,5)、(2,4,5)是 L 中仅有的三元集，即其他三元集都属于 W。因此，W 恰好由这样一些集合组成：(1,2)、(1,3)、(2,4,5)和(3,4,5)之外的三元集，全部四元集，全部五元集。不难验证，这个 W 满足(49:W^*)，而且其 W^m 由下列集合组成：

(1,2)，(1,3)，(2,3,4)，(2,3,5)，(1,4,5)。

现在，不难证明，这个博弈有记号 $[3,2,2,1,1]_h$。

因此，$n=5$ 时，简单博弈是这三个博弈和(52:B)中的那些博弈。我们将这一结果表述为： 463

(52:D)　　不考虑参与人数小于 5 的简单博弈加上哑玩家来得到的博弈①，恰好存在着四个简单五人博弈：$[1,1,1,1,1]_h$，$[1,1,1,2,2]_h$②，$[1,1,2,2,3]_h$③，$[1,1,1,1,3]_h$。

53. $n\geqq 6$ 的简单博弈及其新情况

53.1　$n<6$ 时的有规律性

53.1　在继续下去之前，让我们从上述列举中得出一些结论。

第一：迄今为止，我们得到的简单博弈都有一个记号

---

① 即 $[1,1,1]_h$ 和 $[1,1,1,2]_h$。——463，①

② 为了得到递增的权重，我们置换了这些博弈的玩家。——463，②

③ 同上。——463，③

$[w_1,\cdots,w_n]_h$，即它们都是齐次加权多数博弈。我们已经就 $n=4,5$ 证明了这一点，问题是它是否总是成立。如第 443 页脚注③中指出的那样，这一点不成立。第一个反例出现在 $n=6$ 的时候。

第二：至此，包含任一博弈的每个类 C_k 仅仅包含一个博弈，从 $n=6$ 开始，这一点也不再成立。（见 53.2.1。）

第三：我们也许想当然地认为，对于齐次博弈来说，权重的选择中有很大的自由。然而，我们的列举表明，这些可能性是十分有限的：$n=3,4$ 时，只有一种选择机会；$n=5$ 时，有四种选择机会。[①] 我们强调，由于我们的列举是穷尽的列举，这是严格建立起来的客观事实，不存在方法上的随意性。

第四：我们能够证明第 446 页脚注①的说法，即虽然 W 中的元素个数（2^{n-1}）取决于 n，同一个 n 的简单博弈却可以有不同的 W^m。这一现象从 $n=5$ 开始出现。

对于 $n=3$：W 有 4 个元素，在惟一的例子中，W^m 有 3 个元素。对于 $n=4$：W 有 8 个元素，在惟一的例子中，W^m 有 4 个元素。对于 $n=5$：W 有 16 个元素，在 4 个例子中，W^m 分别有 10、7、5、5 个元素。

第五：我们能够验证第 443 页脚注②的说法，即（有 $U=W^m$ 的）50.4.3 和 50.6.2 的方程（50:8）的个数有可能超过变量的个数，但解只有一个，即一个普通的分配系统。前者意味着，W^m 有 $>n$ 个元素，后者肯定是齐次加权多数

① 不考虑玩家置换。——463，④

博弈的情况[50.8.1 中的(50:K)]。

我们看到，当 $n=3,4$ 时，W^m 必然有 n 个元素，但 $n=5$ 时，它可以有 10 个或 7 个元素。而且，这些博弈都是齐次加权多数博弈。①

关于不存在这些解的简单博弈，见 53.2.5 中第五点说明。 464

53.2　六个主要反例($n=6,7$)

53.2.1　现在，我们转到 $n=6,7$。即便 $n=6$，要完全穷尽所有情况也会十分烦琐。鉴于此，我们不打算这么做。我们将仅仅给出 $n=6,7$ 时的一些有代表性的简单博弈例子，用这些例子说明——如前面指出的那样——特定现象从 n 的这些取值开始出现。

第一：我们在 53.1 的第二点说明中提到过，对于 $n=6$，C_k 可以包含若干个博弈。事实上，不难验证，如下两个齐次加权多数博弈

$$[1,1,1,2,2,4]_h,[1,1,1,3,3,4]_h$$

(见第 463 页脚注②)相互不同且都属于 C_2。

53.2.2　第二：我们曾在 53.1 的第一点说明中提到过，当 $n=6$ 时，存在着一个不是齐次加权多数博弈的简单博弈，即它没有记号$[w_1,\cdots,w_n]_h$。根据 50.8.1 中的(50:K)，这必定是不存在主简单解的情况，即不存在普通意义上的分配系统。(见 53.1 中的第五点说明。)

---

① $n=5$ 时，我们有第一个反例：$[1,1,1,1,1]_h$(直接多数博弈)和$[1,1,1,2,2]_h$。——463，⑤

这样一个博弈的确存在，它甚至有可能有进一步的变化：我们有可能找到一个加权多数博弈（没有齐次性！），即它有一个记号$[w_1,\cdots,w_n]_h$，也有可能找出一个甚至不具有这一性质的博弈。

我们从首先提到的可能情况开始。

令$n=6$：把W定义为这样的$S\subseteq I=(1,\cdots,6)$组成的系，这些$S$要么包含多数玩家（即4个以上），要么恰好包含半数玩家（即6个），但包含1、2、3这三位玩家的多数（即至少2个）。换句话说，玩家1、2、3形成一个针对玩家4、5、6的特权组，但其特权相当有限：正常情况下，总体多数获胜；只有在和局的情况下，结果由特权组中的多数决定。

不难验证，这个W满足(49:W*)。该博弈显然是一个加权多数博弈：我们只需给特权组(1,2,3)的成员较其他玩家(4,5,6)大一些的权重，这些权重也不能太大，免得颠覆了整体多数。任何记号

$$[w,w,w,1,1,1]$$

$1<w<3$都可以。①

465 W^m很快被确定下来。它由如下集合组成：

$$(S_1)\begin{cases}(S'_1):(1,2,3)\\(S''_1):(a,b,h),\\\quad\text{其中 } a,b=1、2、3\text{ 中的任意两个}, h=4\text{ 或 }5\text{ 或 }6,\\(S'''_1):(a,4,5,6),\text{其中 } a=1\text{ 或 }2\text{ 或 }3。\end{cases}$$②

---

① $w>1$是必要的，例如，为使$S=(1,2,4)$战胜$-S=(3,5,6)$（即$2w+1>w+2$），$w>1$就是必要的。$w<3$也是必要的，例如，为使$S=(3,4,5,6)$战胜$-S(1,2)$（即$w+3>2w$），$w<3$就是必要的。——464，①

② 因此，W^m有$1+9+3=13$个元素。——465，①

决定50.8.1意义上的一个主简单解的是50.4.3和50.6.2中的方程(50:8)($U=W^{m}$)：

$$(E_1)\begin{cases}(E'_1):x_1+x_2+x_3=6,\\(E''_1):x_a+x_b+x_h=6,\\\quad\text{其中 } a,b=1、2、3\text{ 中的任意两个},h=4\text{ 或 }5\text{ 或 }6\\(E'''_1):x_a+x_4+x_5+x_6=6,\text{其中 } a=1\text{ 或 }2\text{ 或 }3\end{cases}$$

方程(E_1)是无法求解的。[①] 事实上，有 $a=1,b=2$，$h=4,5,6$的(E''_1)证明，$x_4=x_5=x_6$；取 $a=1,2,3$，(E'''_1)证明，$x_1=x_2x_3$；现在，(E'_1)给出$3x_1=6$，$x_1=2$；所以，(E''_1)给出$4+x_4=6$，$x_4=2$；从而(E'''_1)给出$2+6=6$——矛盾。

应该注意的一点是，这一现象的普通经济学意义是：(S''_1)[即(E''_1)]表明，玩家4、5、6的服务能够相互替代，从而，它们有相同的价值。(S'''_1)[即(E'''_1)]表明，玩家1、2、3的服务有相同的价值。(S'_1)与(S''_1)的比较告诉我们，玩家1、2、3中的一个能够替代玩家4、5、6中的一个，而且，(S''_1)和(S'''_1)的比较告诉我们，前一组的一个玩家能够替代后一组玩家中的两个。因此，这两组玩家之间的替代率根本无法界定。一个自然的办法是声明列入(S_1)中的W^{m}的某些集合是这样的玩家集合，其中的玩家提供的服务“没有有利的用途”。从50.4.3的意义上说，这等于选择$U\subset W^{m}$(见50.7.1和第443页脚注④)。在这个博弈中，一个$U\subset W^{m}$是否能够有必需的性质(见50.7.1)？这是能够通过简单的讨论加以确定的，不过，这一讨论有些烦

① 它们是关于6个变量的13个方程，不过，正如53.1中的第五点说明所证明的那样，这未必是一个障碍。——465，②

项,尚未给出。这样一个 V 的存在性是极为不恰当的。这是因为,我们能够证明,如果它存在的话,那么,它会有数学上不大可能的特征。

这个博弈还有着另一个奇特的方面:我们有可能证明,不存在这样一个解,它仅仅包含有限个分配并具有博弈本身的充分对称性,即在玩家 1、2、3 置换下和玩家 4、5、6 置换下保持不变。我们不打算在这里花费很长的篇幅来证明这一点。[1] 因此,我们倾向于称为自然型的解并不存在。

466 这是一个信号,它说明,在把反常的解称为“不自然的解”或将其排除时,我们必须十分小心。

53.2.3 第三:接下来,我们考虑上面的第二点说明中提到的第二种可能情况:$n=6$ 时的一个简单博弈,它根本不是一个多数博弈,即它没有记号 $[w_1,\cdots,w_n]_h$。这种情况能够被进一步分为两种情况:一、有可能找到一个博弈,它有一个主简单解(见上);二、也有可能找到一个博弈,它没有主简单解。

考虑第一种情况:

令 $n=6$,把 W 定义为这样一些集合 $S[\subseteq I=(1,\cdots,6)]$ 组成的系,S 要么包含全部玩家的多数(即有至少 4 位玩家),要么恰好包含半数(即 3 个元素),但包含 1、2、3 中的偶数个(即 0 或 2 个)。将此与上面第二点说明中的例子进行比较,我们必定会得出如下结果:玩家 1、2、3 仍

① 有限解 V 是否真的存在尚不清楚。我们猜测,这一问题将会有一个否定的回答。——465,③

然形成一个特别有意义的组，但称其意义为特权则是错误的——他们从平局(即三元)集 S 中消失如同他们的强有力表现(恰好他们中的两个出现)一样有利，而且，他们全部出现与他们的弱表现(恰好他们中的一个出现)一样是灾难性的。他们带来一个决策，不是因为他们在 S 中的出现，而是因为一个算术关系：[①]

不难验证，这个 W 满足 49.6.2 中的(49:W^{*})。[②]

接下来，让我们确定 W^{m}。由于 W 包含全部有 ≧4 个元素的集合，W^{m} 中不可能有 ≧5 个元素的集合。现在，考虑 W 中的一个四元集合。

如果 1、2、3 中属于该集合的个数是偶数，从中将玩家 4、5、6 中的一个去掉。[③] 如果 1、2、3 中属于它的个数是奇数，从中将 1、2、3 中的一个去掉。[④] 无论如何，我们总能够得到一个包含 1、2、3 中的偶数个玩家的一个三元集，即该集合属于 W。所以，W^{m} 中不可能有四元集。从而，W^{m} 由 W 中的三元集组成。这些集合是：

---

① 还要注意，4、5、6 这一组玩家有类似意义：因为 S 必须有 3 个元素(以使准则有效)，1、2、3 中的偶数个属于 S 的说法等价于 4、5、6 中的奇数个属于 S 的说法。

这进一步强调了我们一再提到的有关社会组织的可能形式的复杂性，以及参与附带现象的极其丰富多样。——466，①

② 尤其要注意，S 和 $-S$ 之一属于 W：如果两者之一有 ≧4 元素(因此另一个有 ≦2 个元素)，这一点就是确凿无疑的。不然的话 S 和 $-S$ 都有 3 个元素。因此，其中之一包含玩家 1、2、3 中的偶数个，另一个包含其中的奇数个。——466，②

③ 这是可能的，因为 1、2、3 只是三位玩家。——466，③

④ 这是可能的，因为 4、5、6 只是三位玩家。——466，④

$$
(S_2)\begin{cases}(S'_2):\quad (4,5,6)\\(S''_2):\quad (a,b,h),\\\qquad\text{其中 } a、b \text{ 取 } 1、2、3 \text{ 中的任意两个,}\\\qquad h \text{ 取 } 4、5、6 \text{ 中的一个。}\end{cases}
$$
①

467 如果该博弈有记号$[w_1,\cdots,w_n]_h$,那么,

$$\sum_{i\text{属于}S} w_i > \sum_{i\text{不属于}S} w_i \quad S\text{属于 }W\text{。}$$

将这一结果运用于(S_2)中枚举的W^m的集合。这尤其给出:

$$w_4+w_5+w_6>w_1+w_2+w_3,$$
$$w_1+w_2+w_6>w_3+w_4+w_5,$$
$$w_1+w_3+w_5>w_2+w_4+w_6,$$
$$w_2+w_3+w_4>w_1+w_5+w_6\text{。}$$

把这些不等式相加得:

$$2(w_1+w_2+w_3+w_4+w_5+w_6)$$
$$>2(w_1+w_2+w_3+w_4+w_5+w_6),$$

矛盾。

另一方面,确定一个主简单解的50.4.3和50.6.2的方程(50:8)($U=W^m$)是:

$$
(E_2)\begin{cases}(E'_2):\quad x_4+x_5+x_6=6,\\(E''_2):\quad x_a+x_b+x_h=6,\\\qquad\text{其中 } a、b \text{ 取 } 1、2、3 \text{ 中的任意两个,}\\\qquad h \text{ 取 } 4、5、6 \text{ 中的一个。}\end{cases}
$$

---

① 因此,W^*有$1+9=10$个元素。——466,⑤

$x_1 = \cdots = x_6 = 2$ 显然是解。[①]

用普通的经济学术语，我们不得不说，(1,2,3)与(4,5,6)这两组玩家之间的结构上的不同无法用权重和多数来表达，而且，仅就取值而言，它们之间没有不同。

53.2.4　第四：注意，正如 50.8.2 中讨论的那样，上述例子也适用于证明齐次加权多数原则与一个主简单解的存在性之间的不同。事实上，它是(50:21)中 = 的一个例子：因为 $x_1 = \cdots = x_6 = 2$(见上)，故

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 12 = 2n。$$

53.2.5　第五：现在，考虑上面第三点说明中提到的第二种可能情况：$n = 6$ 时的一个简单博弈，它既没有一个记号

$$[w_1, \cdots, w_n]_h$$

也没有一个主简单解。

与第二和第三点说明中的两个例子相比，这个例子所依据的原则不那么明确。这并不令人感到惊奇，因为我们的简化准则都没有得到满足。

这个例子是：

令 $n = 6$。把 W 定义为这样一些集合 $S[\subseteq I = (1, \cdots, 6)]$ 组成的系，这些集合要么包含全部玩家的多数(即至少有 4 个元素)，要么包含其中的半数(即 3 个)元素，而 468
且满足下列条件：要么 S 包含玩家 1 但它又不是(1,3,4)

① 不难证明，这是它们的惟一解。——467，①

或(1,5,6),要么 S 是(2,3,4)或(2,5,6)。[①][②]

不难验证,这个 W 满足49.6.2中的(49:W*)。

W^m 的确定没有太大困难。它由如下集合组成:

$$(S_3)\begin{cases}(S'_3):(1,2,b),\text{其中 } b=3,4,5,6 \text{ 之一},\\ (S''_3):(1,a,b),\text{其中 } a=3 \text{ 或 } 4, b=5 \text{ 或 } 6^{③},\\ (S'''_3):(1,p,q),\text{其中 } p=3,q=4,\text{或 } p=5,q=6,^{④}\\ (S_3^{IV}):(3,4,5,6)。^{⑤}\end{cases}$$

将此应用于(S_3)中枚举的 W^m 的集合。这尤其给出:

$$w_1+w_3+w_5>w_2+w_4+w_6,$$

$$w_1+w_4+w_6>w_2+w_3+w_5,$$

$$w_2+w_3+w_4>w_1+w_5+w_6,$$

$$w_2+w_5+w_6>w_1+w_3+w_4。$$

把这些不等式相加得:

$$2(w_1+w_2+w_3+w_4+w_5+w_6)$$
$$>2(w_1+w_2+w_3+w_4+w_5+w_6),$$

---

① 上面被排除的集合(1,5,6)和(1,3,4)的补集。——468,①

② 如果有关(1,3,4)、(1,5,6)和(2,3,4)、(2,5,6)的最后一个例外情况被忽略,那么,W 就可以按照下述原则来定义:玩家1是一个有特权的玩家——正常情况下多数取胜,但平局局面由玩家1决定。

不难验证,这正是博弈$[2,1,1,1,1,1]_h$。也就是说,与我们在第二点说明中讨论的有点类似的例子相比,这种情况甚至更为简单,因为这里的特权有一个普通意义上的数值。

因此,有关(1,3,4)、(1,5,6)和(2,3,4)、(2,5,6)的复杂例外情况是导致我们这个例子的真正特征关键。——468,②

③ 注意,a、b 相互独立地变化,而 p、q 不独立!——468,③

④ 同上。——468,④

⑤ 因此,W^m 有4+4+2+1=11个元素。——468,⑤

矛盾。

另一方面，用于决定一个主简单解的50.4.3和50.6.2的方程(50:8)($U=W^{m}$)是：

$$
(E_3)\begin{cases}(E'_3):x_1+x_2+x_b=6,\text{其中 } b=3,4,5\text{ 或 }6,\\(E''_3):x_1+x_a+x_b=6,\text{其中 } a=3\text{ 或 }4,b=5\text{ 或 }6,\\(E'''_3):x_2+x_p+x_q=6,\\\qquad\text{其中 } p=3,q=4,\text{或 } p=5,q=6,\\(E^{N}_3):x_3+x_4+x_5+x_6=6。\end{cases}
$$

这些方程(E_3)是无法求解的。[①] 事实上，(E''_3)表明，$x_3=x_4$和$x_5=x_6$，从而(E'''_3)给出，$x_2+2x_3=6$，$x_2+2x_5=6$，所以$x_3=x_5$，进而$x_3=x_4=x_5=x_6$。现在，(E^{N}_3)给出$4x_3=6$，$x_3=$ 469
$\frac{3}{2}$，而(E''_3)，(E'''_3)给出$x_1+3=6$，$x_2+3=6$，即$x_1=x_2=3$。最后，(E'_3)变成了$3+3+\frac{3}{2}=6$，矛盾。

至于为什么它不可求解，解释基本上与第二点说明中相应之处的评论相同。

53.2.6 第六：正如50.8.2中讨论的那样，我们已经提到过齐次加权多数原则与一个主简单解的存在性之间的区别。这是在第四点说明中完成的，那里给出(50:21)中取=的一个例子。下面，我们将给出(50:21)中取>的一个例子。

我们已经发现，当$n\leqq5$时，所有简单博弈都是齐次加权多数博弈，所以我们必须假设$n\geqq6$。当$n=6$时，我们还不知道是否存在我们希望的这种例子。下面，我们要给

① 它们是关于6个变量的10个方程，见第465页脚注②。——468，⑥

出的是 $n=7$ 时的一个例子。

令 $n=7$。把 W 定义为这样一些集合 $S[\subseteq I=(1,\cdots,7)]$ 构成的系，这些 S 包含下述 7 个三元集：①

(S_4)：　(1,2,4),(2,3,5),(3,4,6),(4,5,7),
　　　　(5,6,1),(6,7,2),(7,1,3)

这一定义中包含的原则能够有多种解释方式。

第一种解释是：(S_4)中的这 7 个集合是在(1,2,4)的基础上通过循环的玩家置换来得到的。也就是说，其全部元素都增加 0、1、2、3、4、5、6 中的任何一个并分别用 1、2、3、4、5、6 取代 8、9、10、11、12、13。②

换句话说：从图 89 中打了 × × × 的集合开始，通过转动图中圆周可得这 7 个集合中的任何一个。

第二种解释是：图 90 以这样一种排列方式显示了玩家 1,…,7，其中，上述 7 个集合能够被直接标明。它们分别是 6 条直线和圆周○上的数组成的集合。③

不难验证，这个 W 满足(49：W^*)，但我们将这一问题留给对此有兴趣的读者。W^m 显然由(S_4)的 7 个集合组成。

结合第三和第四点说明，容易证明，这不是一个加权多数博弈。我们略去这一论述。

另一方面，决定一个主简单解的 50.4.3 和 50.6.2 的方程(50:8)($U=W^m$)是：

---

① 因此，W^m 有 7 个元素。——469，①

② 数论说法是：以 7 为模。——469，②

③ 熟悉射影几何学的读者会注意到，图 90 是所谓 7 点平面几何图。问题中的 7 个集合是它的每个包含 3 个点的直线以及圆周○。

要补充的一点是，其他射影几何学似乎不适用于我们当前的目的。——469，③

(E_4)：　　　　$x_a + x_b + x_c = 7$，

其中(a,b,c)取遍(S_4)的 7 个集合。$x_1 = \cdots = x_7 = \frac{7}{3}$显然是它的解。①

现在，我们能够证明，50.8.2 中(50:21)中的 > 成立。 470
事实上：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{49}{3} > 14 = 2n。$$

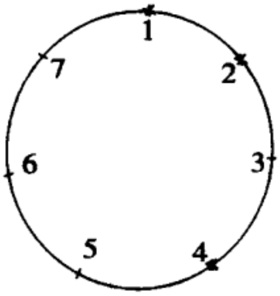

图 89

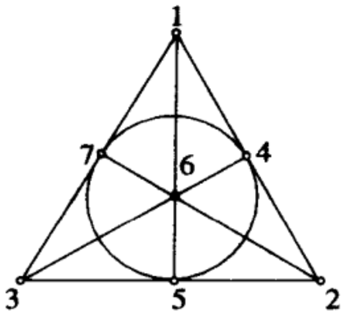

图 90

正如我们在第二、第三和第五点说明中讨论的博弈那样，这个博弈也对应着一个值得仔细研究的组织原理。在这一博弈中，W^m 的集合，即关键胜利联盟总是少数玩家组成的联盟（三元集）。不过，任何一位玩家都没有较其他玩家的优势：图 89 及其讨论表明，玩家 1，…，7 的任何循环置换——即图 89 的圆周的任何转动——都不改变该博弈的结构。任何一位玩家都能够被转移到另一位玩家的

① 不难看出，这是其惟一的解。——469，④

位置。[1] 因此，该博弈的结构并非由个别玩家性质[2]决定，而由玩家之间的关系决定。事实上，胜败取决于由(S_4)[3]给出的相关三位玩家之间达成的协议。

54. 适宜博弈中全部解的确定

54.1 简单博弈不同于主解的解

54.1.1 迄今为止，我们关于简单博弈的讨论大多强调的是 50.5.1—50.7.2 中讨论的那种解，尤其是 50.8.1 的主简单解。基于前面几节中的内容——尤其是 53.2 中的例子，这一方法似乎并不能充分恰当地处理我们的问题的各个方面。

471 首先，我们已经看到，无法指望所有简单博弈都有上述类型的解。当 $n=6$ 时，大量新情况就已经出现了。这是有显著意义的，因为从组合数学的角度看，6 是一个相当大的数，但从社会组织的角度看，它却是一个很小的数。

其次，即便解是存在的，即便这是对于齐次加权多数博弈来说的，这些解也不能解释所有的事情。对于这类博

① 不过，从 28.2.1 意义上说，该博弈并非公平博弈，因为两个三元集(1,2,4)和(1,3,4)有不同行为：前者属于 W，后者属于 L。[所以，在该博弈的 $\gamma=1$ 的简化型中，前者的 $v(S)=4$，而后者的 $v(S)=-3$。]——470,①

② 由博弈规则赋予他们的性质。——470,②

③ 在这一博弈中，不存在两位玩家之间有意义的关系：有可能通过适当的置换把(1,…,7 中的)任意两位玩家变成另两位玩家，但博弈保持不变。——470,③

弈的大多数原型来说，正如我们知道的那样，本质三人博弈有记号$[1,1,1]_h$，存在很多解。而且，我们在第 33 节中的讨论表明，对于我们要讨论的理论的特征及其含义来说，它们都是基本的，尤其是，一些基本的解释事实上是在那里首次得出的。

54.1.2 所以，我们确定一个简单博弈的全部解，而且，在还不能对所有简单博弈做到这一点的情况下，我们要对尽可能多的简单博弈这么做。尤其是，我们至少要对 n 的每个取值的一个简单博弈做到这一点。关于 n 个参与者的解的分类结构的可能性和原则，这样的结果将会提供一些信息。

事实上，如果对于其他博弈来说这类信息也是能够得到的，那么，它同样是受欢迎的。然而，在系统地确定解时，简单博弈较其他博弈有一个明显的优点：对于简单博弈来说，30.1.1 的所谓初始条件并不带来困难（见 31.1.2），因为那里的每个集合 S 要么是肯定必要的，要么是肯定不必要的（见 49.7）。

同样正确的是，我们设想的解的决定仅仅提供了零零星星几个例子的信息。但是，它们毕竟包括了所有的 n，使我们能够随意改变 n。这必定会带来一些基本的见解。

54.2 全部解已知的博弈的枚举

54.2.1 让我们总结一下全部解已知的例子有多少。我们有三类这样的例子：

（a）31.2.3 中的所有非本质博弈［见 31:P，附带有 31.2.1 中（31:I）］。

（b）旧理论中的本质三人博弈和（有一般剩余的）

新理论中的本质三人博弈。(前者见 32.2.3,后者见 47.2.1—47.7 的分析。)

(c)成分博弈的全部解已知的可分解博弈。[见 46.6 中的(46:I)]

显然,我们能够借助(c)把(a)和(b)结合起来,从而得到全部解已知的博弈。① 在这一构筑过程中,(a)仅仅提供"哑玩家"(见 43.4.2 末尾),因此,我们完全可以忽
472 略它,因为我们要的是结构信息。因此,留给我们的是把(c)重复运用于(b)而得到的那些博弈。如此,我们能够得到的博弈是本质三人博弈的合成。②

54.2.2 这给出全部解已知的 $n=3k$ 人博弈。由于 k 是随意的,我们能够使 n 随意大。就此而言,事情是令人满

① 这能够被表达为:

根据 43.3 末尾和(43:E)的分解分拆的定义,一个给定的博弈 Γ 是其不可分解的成分的合成。43.4.2 中的(43:L)告诉我们,组成这一分拆的参与者集合是一元集或三元以上的集合。

最简单的情况是,它们都是一元集。根据 43.4.1 中的(43:J),这意味着,该博弈是非基本博弈,即它使我们回到了情况(a)。

紧接着的最简单情况是,它们是一元集或三元集。这些正是我们能够根据(c)从(a)和(b)构造的博弈,即我们知道这些博弈的全部解。

这是令人满意的,因为这表明,一个自然的分类是按照不可分解的成分博弈[即分解分拆的元素,见 43.4.2 中的(43:L)]的大小进行分类:我们在获得全部解方面的进步恰好沿着这种分类给出的路线进行。

它还强调了这些结果是多么有限:事实上,一个博弈完全可分解是一个十分特殊的情况。[根据 42.5.2 末尾的准则,请记住 41.3.2 中(41:6)或(41:7)的定义方程!]典型 n 人博弈是不可分解的且无法借助(c)来得到。——471,①

② 通过应用策略等价,我们能够假设它们都有简化型。不过,我们分别用 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 记它们的 γ,我们不能指望通过改变单位来把它们都弄得等于 1(除非 $k=1$)。事实上,它们的比率 $\gamma_1:\cdots:\gamma_k$ 不因单位改变而变化。——472,①

意的。然而，这样的 n 人博弈只不过是本质三人博弈的聚合——现实中，玩家组成三人集合，博弈规则未能使其相互联系起来。事实上，我们关于可分解博弈的解的结果表明，这些玩家集合的一种联系总是在典型解中提供的——即通过典型行为标准来提供的。但是，我们自然想明白普通的典型联系如何明确地由博弈规则确立起来，并影响玩家组织——即解或行为标准。而且，我们想就大数玩家做到这一点。

因此，我们必须寻找更多有可能确定其全部解的 n 人博弈。

54.3 分析简单博弈 $[1,\cdots,1,n-2]_h$ 的理由

54.3.1 正如上面指出的那样，我们要寻找典型简单博弈。[①] 对于每个 $n \geqq 3$，似乎总存在一个特定的简单博弈，关于这一博弈，全部解的决定是能够做到的。对于一个给定的 n，这是惟一一个全部解能够一般地决定的 n 人博弈。这显然赋予它一个特别有意义的地位。我们将看到，它允许若干方面的有意思解释。

问题中的博弈已经在 52.3 和 52.4 的(52:B)中出现过。它是齐次加权多数博弈 $[1,\cdots,1,n-2]_h$（n 位玩家）。

54.3.2 正如我们在 52.3 中讨论的那样，在这一博弈中，最小胜利联盟是如下集合 S:$(1,n)$，…，$(n-1,n)$ 和 $(1,\cdots,n-1)$。也就是说，玩家 n 只要找到任意一个盟友 473

① 为此，我们利用旧理论，即剩余为零。见 51.6 中的第三和第四点说明。——472，②

都能够取胜，但是如果他完全被孤立了，那么，他将失败。[①] 我们对这一结果做几点说明：

第一：上述规则强烈意味着，玩家 n 居于特权地位：他只需一个盟友就可以取得胜利，而其他玩家无一例外地相互需要。实际情况是：玩家 n 需要一个二人联盟，其他玩家则需要 $n-1$ 个人的联盟，因此，特权只能存在于 $n-1>2$ 即 $n\geqq4$ 的情况。

当 $n=3$ 时，三位玩家之间的确没有什么不同：此时，我们有博弈 $[1,1,1]_h$，惟一的本质三人博弈，且显然是对称的。

第二：玩家 n 的特权是能够存在的最大特权：我们要求玩家 n 至少找到一个盟友才能取胜，这是最低要求。[②] 我们不可能规定 n 无需盟友就能够取胜，这等于说一元集 (n) 取胜——这与该博弈是本质博弈不相容。（49.2 中对此进行了广泛讨论。）

55. 简单博弈 $[1,\cdots,1,n-2]_h$

55.1 准备性说明

55.1 我们在前面讨论了这个博弈的全部解的确定。

① 正如每个一元集都必定失败。——473，①

② 我们在前面说过，当 $n=3$ 时，玩家 n 没有特权可言，现在我们说他有着不应该有的特权！然而，$n=3$ 并非如下说法的例外：因为仅仅存在一个本质三人博弈，一位玩家在其中为自己找到的位置也可以被称为最好的位置——因为这是存在着的惟一一个位置。——473，②

上述讨论表明，它们落入一个分类系列之中，而且表现出较为多变的特征。它们为我们在前面提到的解释提供了一个机会。我们将讨论其中的一些，在随后的研究中会有更多这方面的讨论。

解的这一完全列举的严格推导将在 55.2—55.11 中给出。这一推导相当复杂。就像第 9 章中我们就可分解博弈的解所做的那样，我们将详细给出这一枚举：其证明本身就是对其进行解释的一个方便而自然的工具。它在若干阶段提供了用文字揭示被探讨组织新出现的特点的机会。事实上，与第 9 章中的证明相比，在这一章的证明中，这种情形更为显著。

55.2　占优和首要玩家：情况(I)和(II)

55.2.1　有了这些说明，我们继续博弈$[1,\cdots,1,n-2]_h$(n 个玩家)的系统研究。我们假设该博弈有正规化的简化型，$\gamma=1$。

首先，我们有如下结果： 474

(55:A)　对于 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，　$\vec{\beta}=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$，

$$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$$

的充分必要条件是，要么

(55:1)　$\alpha_n>\beta_n$　且对于某些 $i=1,\cdots,n-1$，　$\alpha_i>\beta_i$

要么

(55:2)　对于所有 $i=1,\cdots,n-1$，　$\alpha_i>\beta_i$。

证明：这与 49.7.2 中的(49:J)相同，因为 W^m 由集合$(1,n),\cdots,(n-1,n)$和$(1,\cdots,n-1)$组成。

注意，$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 0$ 允许我们从(55:2)推出

(55:3) $$\alpha_n < \beta_n。$$

所以：

(55:B) $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 或 $\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$ 的必要条件是 $\alpha_n \neq \beta_n$。

证明：根据对称性，我们只需考虑 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$。我们看到，由(55:1)或(55:3)，无论何种情况，总有 $\alpha_n \neq \beta_n$。

这两个看似简单的结果却值得说明。

我们在 54.3 中讨论了这个博弈中的玩家 n 拥有特权。[①] 他相当于处于垄断的地位，不过，一个无法逃避的约束是（见上面第二点说明），他必须至少找到一个盟友。也就是说，他之外的全部玩家的总联盟能够打败他。我们称这个玩家是这个博弈中的**首要玩家**。[②]

55.2.2 在(55:1)和(55:2)中，这些情形十分清楚。你也许会说，(55:1)是首要玩家和随意一位盟友（玩家 $i=1,\cdots,n-1$ 中的任意一位）占优的直接形式，而(55:2)可以被说成反对他的总合作状态。(55:1)、(55:3)或(55:B)表明，在一个占优中，(55:1)中首要玩家受到有利影响（首要玩家的直接占优形式）；(55:2)中首要玩家受到不利影响（反对首要玩家的总合作）。在一个占优中，任何其他玩家都能够不受影响。[③]

---

① 除了 $n=3$ 时的情况，对此，后面将有更多说明。——474，①

② 至于 $n=3$，54.3 末尾的第一点说明应该被牢记在心。——474，②

③ 也就是说，对于 $i=1,\cdots,n-1$ 中的某一个，$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 且 $\alpha_i=\beta_i$。只有在 $n \geq 4$ 时，这样的事情才会实际发生，见有关 $n=3$ 时的结果。——474，③

55.2.3　现在，考虑这个博弈的一个解 V。[1] 构造 475

$$\mathrm{Max}_{\vec{\alpha}\text{属于}V}\,\alpha_n=\overline{\omega},$$

$$\mathrm{Min}_{\vec{\alpha}\text{属于}V}\,\alpha_n=\underline{\omega}。$$[2]

显然

$$-1\leqq\underline{\omega}\leqq\overline{\omega}。$$

$\underline{\omega}$、$\overline{\omega}$ 的含义十分清楚：它们分别代表着解 V 中首要的最坏和最好的可能结果。

我们区别两种可能性：

(I)　　$\underline{\omega}=\overline{\omega}$,

(II)　　$\underline{\omega}<\overline{\omega}$。

55.3　情况(I)的解决

55.3.1　考虑情况(I)。这意味着，对于 V 中所有的 $\vec{\alpha}$，

(55:4)　　$\alpha_n=\overline{\omega}$,

即在该解内，首要玩家在任何条件下都得到相同数额。换句话说：(I)表达的是，从 33.1 意义上说，首要玩家被隔离了。考虑到首要玩家的核心作用，其第一个可供选择的特征应该符合这一方向。[3]

55.3.2　接下来，让我们讨论情况(I)中的解 V。

---

① 运用旧理论，见第 472 页脚注②。——475，①

② 如同第 384 页脚注①所做的那样，这些数量能够构造，即最大值和最小值存在且假设能够得以确定。特别注意脚注中的(*)部分。——475，②

③ 提到 33.1，我们重新强调了这一过程与本质三人博弈中相应过程的类似性。

如果回想起本质三人博弈是我们现在考虑的博弈的一种特殊情况，这一过程就显得更为自然了。(例如，见 54.3 中第一点说明。)

(55:C) V恰好是满足(55:4)的$\vec{\alpha}$组成的集合。

476 证明：我们已经知道，V的所有$\vec{\alpha}$都满足(55:4)。反过来，如果一个$\vec{\beta}$满足(55:4)，那么，V的每个$\vec{\alpha}$都有$\alpha_n=\beta_n$，因此，(55:B)排除了$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$。所以，$\vec{\beta}$属于V。

因此，V是很容易确定的，但是，我们现在必须回答相反的问题：给定一个$\overline{\omega}\geqq -1$，由(55:4)[即由(55:C)]定义的V是一个解吗？也就是说，它满足30.1.1的(30:5:a)和(30:5:b)吗？

对于V中的$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$，(55:B)和(55:4)排除了$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$，从而(30:5:a)自动得到满足。因此，我们只需研究30.1.1的(30:5:b)，即我们必须确保如下性质：

(55:5) 如果$\beta_n\neq\overline{\omega}$，那么，对于某一个$\vec{\alpha}$，$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$，有$\alpha_n=\overline{\omega}$。

$n=3$的情况的详细分析表明，这种相似性有一个不能令人满意的地方：在这种情况下，该博弈实际上是对称的，从而，三位玩家中的任何一位都能够被称为首要玩家。(见第474页脚注②)在33.1中，隔离的确能够被用于三位玩家中的任何一位，现在，我们随意将其限定为玩家n！

然而，要想使我们的讨论覆盖所有的$n\geqq3$，我们就无法将这一过程应用于其他玩家：当$n\geqq4$时，首要玩家及其作用是惟一的。

要使这种情况能够暂时地被接受，我们必须牢记情况(II)最终表现为一个合成情况。

因此，当$n=3$时，与32.2.3的分类的比较表明：我们的情况(I)是那里(32:A)的可能情况之一：针对玩家3的歧视；另一方面，我们的情况(II)结合(32:B)包括(32:A)的另外两种可能情况：针对玩家1、2的歧视和非歧视解。所以，(II)实际上是$n=3$时的三种可能性的综合。

这一方案将被推广到所有的n。见55.12.5的第四点说明中的(e)。——475，③

更明确一些说：我们必须确定(55:5)对 $\overline{\omega}$ 增加了什么限制。

(55:5)的 $\beta_n \neq \overline{\omega}$ 能够被分为：

(55:6)　　$\beta_n > \overline{\omega}$,

(55:7)　　$\beta_n < \overline{\omega}$。

我们首先证明：

(55:D)　　在(55:6)的情况下，条件(55:5)自动得到满足。

证明：假设 $\beta_n > \overline{\omega}$，即 $\beta_n = \overline{\omega} + \varepsilon, \varepsilon > 0$。定义

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\},$$

其中，对于 $i = 1, \cdots, n-1, \alpha_i = \beta_i + \frac{\varepsilon}{n-1}$，且 $\alpha_n = \beta_n - \varepsilon = \overline{\omega}$。根据(55:2)，$\vec{\alpha}$ 正是满足 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 的分配。

这样，只剩下情况(55:7)。关于这种情况，我们有：

(55:E)　　对于 $\overline{\omega} = -1$，(55:7)是不可能的。

证明：$\beta_n \geqq -1$，所以不会有 $\beta_n < \overline{\omega} = -1$。

$\overline{\omega} > -1$ 的情况要复杂一些。①

(55:F)　　假设 $\overline{\omega} > -1$ 且情况(55:7)，那么，条件(55:5)等价于 $\overline{\omega} < n - 2 - \frac{1}{n-1}$。

证明：假设 $\beta_n < \overline{\omega}$。对于有 $\alpha_n = \overline{\omega}$ 的一个 $\vec{\alpha}$，55.2.1 的 477

① $\overline{\omega} = -1$ 意味着，首要玩家没有被隔离，只不过遭到了最不利的歧视。(见 33.1。)

因此，$\overline{\omega}$ 直接给出一个解，而 $\overline{\omega} > -1$ 则要求对(55:F)进行更为详细的分析。这一点也不令人吃惊：与中间情况的歧视相比，一种极端歧视方式是一个更为基本的命题且不需要那么复杂的调整。——476，①

(55:3)被排除了,即占优关系 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 必须通过(55:A)中的(55:1)[而非(55:2)]起作用。由于 $\alpha_n > \beta_n$,这个条件等于

(55:8) $\alpha_i > \beta_i$ 对于某些 $i = 1, \cdots, n-1$ 成立。

因此,(55:5)要求有 $\alpha_n = \overline{\omega}$ 的一个分配 $\vec{\alpha}$ 的存在性和(55:8)成立。

首先,就一个固定的 $i = 1, \cdots, n-1$ 考虑(55:8),那么,这个条件以及 $\alpha_n = \overline{\omega}$ 能够由 $\vec{\alpha}$ 满足的充分必要条件是,β_i 和 $\overline{\omega}$ 与$(n-2)$个 -1 加起来 <0,即 $\beta_i + \overline{\omega} - (n-2) < 0$,$\beta_i < n - 2 - \overline{\omega}$。所以,$i = 1, \cdots, n-1$ 时,(55:8)得不到满足的充分必要条件是

(55:9) $\beta_i \geqq n - 2 - \overline{\omega}$, $i = 1, \cdots, n-1$。

(55:5)表达的是,对于 $\beta_n < \overline{\omega}$ 的 $\vec{\beta}$,这样的事情是不应该发生的,即一个分配 $\vec{\beta}$ 不可能同时满足(55:9)和 $-1 \leqq \beta_n < \overline{\omega}$。① 这意味着,$n-1$ 个加数$(n-2-\overline{\omega})$与一个加数 -1 之和必须 >0,即 $(n-1)(n-2-\overline{\omega}) - 1 > 0$,$n - 2 - \overline{\omega} > \frac{1}{n-1}$,从而 $\overline{\omega} < n - 2 - \frac{1}{n-1}$。

结合(55:E)、(55:F)并回忆(55:D)以及有关(55:5)、(55:6)和(55:7)的说明,我们总结如下:

(55:G) 令 $\overline{\omega}$ 是任意一个满足下式的数:

$$-1 \leqq \overline{\omega} < n - 2 - \frac{1}{n-1}。$$

---

① 我们正假设,对于 $i = 1, \cdots, n-1$,(55:9)意味着 $\beta_i \geqq -1$。这意味着,$n - 2 - \overline{\omega} \geqq -1$,$\overline{\omega} \leqq n-1$。事实上,$\overline{\omega} > n-1$ 必须被排除,因为它使得任何分配都无法满足(55:4):那样的话,$\overline{\omega}$ 和 $-(n-1)$之和就会 >0。

因此,假设(55:F)意味着:$\overline{\omega} \leqq n-1$。——477,①

构造 $\vec{\alpha}$ 组成的集合 V，其中 $\vec{\alpha}$ 满足

$$\alpha_n = \overline{\omega}。①$$

这些正是情况（I）下的全部解。

数量 $n-2-\frac{1}{n-1}$ 的第一批取值是： 478

n	3	4	5	6
$n-2-\frac{1}{n-1}$	$\frac{1}{2}=0.5$	$\frac{5}{3}=1.67$	$\frac{11}{4}=2.75$	$\frac{19}{5}=3.8$

图 91

55.3.3 这一结果的解释并不困难：

这一行为标准（解）的基础是把首要玩家从博弈中排除出去。这使得其他玩家之间的分配变得相当不确定，即任何一个分配，只要它给予首要玩家“约定”的数额 $\overline{\omega}$，该分配就属于解。“约定”数额的上限是 $\overline{\omega}$。我们也能够按照 33.1.2 的思路得到一个具体的值，$n-2-\frac{1}{n-1}$。这不是我们现在要考虑的问题。

55.4 情况（II）：$\underline{V}$ 的确定

55.4.1 现在，我们转向较为困难的情况（II）。（见

① 与 33.1 中 $n=3$ 的特殊情况的讨论——指第 475 页脚注③——相比，我们注意到，这对应着那里的 c。对于 $n=3$，我们的 $n-2-\frac{1}{n-1}$ 变成了那里的 $\frac{1}{2}$。——477，②

第 475 页脚注③。)我们有

$$-1 \leqq \underline{\omega} < \overline{\omega}。$$

这暗示着 V 的如下分解,V 分解为三个互不相交的集合:

$\underline{V}$:V 中满足 $\alpha_n = \underline{\omega}$ 的 $\vec{\alpha}$ 组成的集合,

$\overline{V}$:V 中满足 $\alpha_n = \overline{\omega}$的 $\vec{\alpha}$ 组成的集合,

V^*:V 中满足$\underline{\omega} < \alpha_n < \overline{\omega}$的 $\vec{\alpha}$ 组成的集合。

根据$\underline{\omega}$、$\overline{\omega}$ 的性质(见 55.2.3 开头),$\underline{V}$、$\overline{V}$ 都不可能是空集——但是,关于 V^*,我们却不能下这样的定论。①

55.4.2 让我们首先研究$\underline{V}$。

(55:H) 如果 $\vec{\alpha}$ 属于$\underline{V}$且 $\vec{\beta}$ 属于 $\overline{V} \cup V^*$,那么,$\alpha_i \geqq \beta_i, i = 1, \cdots, n-1$。

证明:假如对于某个 $i = 1, \cdots, n-1$, $\beta_i > \alpha_i$。由于 $\alpha_n = \underline{\omega}$, $\beta_i > \underline{\omega}$,所以 $\beta_n > \alpha_n$。根据(55:1),$\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$ 是不可能的,因为 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 都属于 V。

479 构造

$$\underline{\alpha}_i = \mathrm{Min}_{\vec{\alpha}\text{属于}\underline{V}} \alpha_i,$$

其中 $i = 1, \cdots, n-1$。②

(55:H)直接给出:

(55:I) 如果 $\vec{\beta}$ 属于 $\overline{V} \cup V^*$,那么,

---

① 实际上,在(55:V)的情况下,V^* 就是一个空集。——478,①

② 我们能够构造这一数量,即这些最小值存在且假设能够像第 384 页脚注①中那样断定。特别要注意那里的(*)部分。那里有关 V 的说法对与$\underline{V}$来说也成立,它是 V 与满足 $\alpha_n = \underline{\omega}$ 的 $\vec{\alpha}$ 组成的封闭集的交集。——479,①

$$\underline{\alpha}_i \geqq \beta_i, \quad i = 1, \cdots, n-1。$$①

我们要进一步证明

(55:J)　　$$\sum_{i=1}^{n-1} \underline{\alpha}_i + \underline{\omega} \geqq 0。$$②

证明：假设 $\sum_{i=1}^{n-1} \underline{\alpha}_i + \underline{\omega} < 0$，那么，我们能够构造分配 $\vec{\gamma} = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$，当 $i = 1, \cdots, n-1$ 时，$\gamma_i > \alpha_i$，且 $\gamma_n = \underline{\omega}$。③

$\bar{V}$ 不是空集，从 $\bar{V}$ 中选择一个 $\vec{\beta}$，那么，根据(55:I)，对于 $i = 1, \cdots, n-1$，$\beta_i \leqq \underline{\alpha}_i < \gamma_i$，从而，根据(55:2)，$\vec{\gamma} \succ \vec{\beta}$。由于 $\vec{\beta}$ 属于 V，这就排除了 $\vec{\gamma}$ 属于 V。

因此，V 中存在一个 $\vec{\alpha}$ 有 $\vec{\alpha} \succ \vec{\gamma}$。如果 $\vec{\alpha}$ 属于 $\underline{V}$，那么，$\alpha_n = \underline{\omega} = \gamma_n$，所以，$\vec{\alpha} \succ \vec{\gamma}$ 与(55:B)矛盾。这样，$\vec{\alpha}$ 必定属于 $\bar{V} \cup V^*$。根据(55:I)，对于 $i = 1, \cdots, n-1$，$\alpha_i \leqq \underline{\alpha}_i < \gamma_i$。但是，由于 $\vec{\alpha} \succ \vec{\gamma}$，(55:A)中的(55:1)和(55:2)要求至少对于 $i = 1, \cdots, n-1$ 中的某一个，$\alpha_i > \gamma_i$。这样，我们得出一个矛盾。

现在，$\underline{V}$的确定是能够完成的：

(55:K)　　$\underline{V}$恰好有一个元素：

$$\vec{\alpha}^0 = \{\underline{\alpha}_1, \cdots, \underline{\alpha}_{n-1}, \underline{w}\}。$$

证明：令 $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\}$ 是$\underline{V}$中的一个元素，那 480

---

① 注意，对于$\underline{V}$中的 $\vec{\beta}$，我们却不能这么说，原因是 β_i 有可能大于最小值 $\underline{\alpha}_i$。见(55:L)。——479，②

② 见(55:12)。——479，③

③ 注意，根据它们的定义，全部 $\underline{\alpha}_i \geqq -1$，$(i = 1, \cdots, n-1)$ 且 $\underline{\omega} \geqq -1$，从而所有 $\gamma_i \geqq -1$，$(i = 1, \cdots, n-1, n)$。——479，④

么，根据这些数量的定义，

$$(55:10)\qquad \begin{cases}\alpha_i \geqq \underline{\alpha}_i, & i=1,\cdots,n-1,\\ \alpha_n = \underline{\omega}。\end{cases}$$

现在 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0$，而且根据(55:J)，$\sum_{i=1}^{n-1}\underline{\alpha}_i + \underline{\omega} \geqq 0$，从而 > 被从(55:10)的所有不等式中排除了。

因此

$$(55:11)\qquad \begin{cases}\alpha_i = \underline{\alpha}_i, & i=1,\cdots,n-1,\\ \alpha_n = \underline{\omega}。\end{cases}$$

即

$$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n\} = \{\underline{\alpha}_1,\cdots,\underline{\alpha}_{n-1},\underline{\omega}\}。$$

所以，$\underline{V}$不可能有不同于$\{\underline{\alpha}_1,\cdots,\underline{\alpha}_{n-1},\underline{\omega}\}$的元素。因为$\underline{V}$不是空集，这是其惟一的元素。

55.4.3 注意，由于 $\vec{\alpha}^{\circ} = \{\underline{\alpha}_1,\cdots,\underline{\alpha}_{n-1},\underline{\omega}\}$ 属于$\underline{V}$，它必然是一个分配。所以，我们能够把(55:J)加强为

$$(55:12)\qquad \sum_{i=1}^{n-1}\underline{\alpha}_i + \underline{\omega} = 0。$$

我们还能够把(55:I)加强为：

(55:L) 如果 $\vec{\beta}$ 属于 V，那么，

$$\underline{\alpha}_i \geqq \beta_i,\quad i=1,\cdots,n-1。$$

证明：对于 $\bar{V}\cup V^{*}$ 中的 $\vec{\beta}$，我们已经在(55:I)中说明了这一点，对于$\underline{V}$中 $\vec{\beta}$，(55:K)甚至给出 $\beta_i = \underline{\alpha}$。

最后，我们证明

$$(55:M)\qquad \underline{\omega} = -1。$$

证明：假设$\underline{\omega} > -1$，即$\underline{\omega} = -1+\varepsilon$，$\varepsilon>0$。定义 $\vec{\beta}$ =

$\{\beta_1,\cdots,\beta_{n-1},\beta_n\}$，其中，$\beta_i=\underline{\alpha}_i+\frac{\varepsilon}{n-1}$，$i=1,\cdots,n-1$，$\beta_n=\underline{\omega}-\varepsilon=-1$。$\vec{\beta}$ 是一个分配[见(55:12)]。$\beta_n<\underline{\omega}$，或同样地，(55:L)把 $\vec{\beta}$ 从 V 中排除了。

因此，V 中存在一个 $\vec{\alpha}$ 满足 $\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$。根据(55:L)，$\alpha_i$ 481
$\leqq\underline{\alpha}_i<\beta_i$，$i=1,\cdots,n-1$。但是，由于 $\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$，(55:A)中的(55:1)和(55:2)要求 $\alpha_i>\beta_i$ 至少对于某个 $i=1,\cdots,n-1$ 成立。这样，我们遇上了一个矛盾。

注意，(55:12)现在变成了

(55:N) $$\sum_{i=1}^{n-1}\underline{\alpha}_i=1。$$

这里的分析的基本结果是(55:K)、(55:L)和(55:M)。我们将其总结如下：[①]

对于首要玩家来说，最坏的可能结果是完全失败(值 -1)。在 V 中，有且只有一种这样的安排——即分配，而对于其他玩家来说，这是最好的结果。

这种安排是，其余玩家完全合作来对付首要玩家。[②]

读者将会注意到，这一段文字描述虽不复杂，却只能通过数学方法，而不能用文字表述来证明。

55.5　情况(II)：$\bar{\text{V}}$ 的确定

55.5.1　下面，我们能够研究 $\bar{\text{V}}$。

---

① 当然，所有这些仅仅适用于情况(II)。——481，①

② 在 55.2 最后一部分，我们使用过这一表述，不过意义有些不同。——481，②

(55:O) 考虑一个分配 $\vec{\beta}=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$，对于某个 $i=1,\cdots,n-1$，$\beta_i\geqq\underline{\alpha}_i$ 且 $\beta_n\geqq\underline{\omega}$，那么，$\vec{\beta}$ 属于 V。

证明：假设 $\vec{\beta}$ 不属于 V，那么，V 中存在一个 $\vec{\alpha}$，有 $\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$。所以，(55:A) 的 (55:1) 或 (55:2) 必定成立。由于 $\vec{\alpha}$ 属于 V，$\alpha_n\leqq\overline{\omega}\leqq\beta_n$，而且这排除了 (55:1)。根据 (55:L)，对于某个 $i=1,\cdots,n-1$，$\alpha_i\leqq\underline{\alpha}$，从而 $\alpha_i\leqq\underline{\alpha}\leqq\beta_i$ 至少对于某个 $i=1,\cdots,n-1$ 来说成立，这排除了 (55:2)。所以，两种情况下我们都面临着一个矛盾。

(55:P) $\underline{\alpha}_i\geqq n-2-\overline{\omega},\quad i=1,\cdots,n-1$。

证明：假设对于某个 $i=1,\cdots,n-1$，$\underline{\alpha}_i<n-2-\overline{\omega}$，即

$$-(n-2)+\underline{\alpha}_i+\overline{\omega}<0。$$

482 那么，我们能够选择 $\beta_j\geqq-1$ ($j=1,\cdots,n-1$, $j\neq i$, $n-2$ 个 j 的取值)，$\beta_i\geqq\underline{\alpha}_i$，$\beta_i>\overline{\omega}$ 且 $\sum_{j=1}^{n}\beta_j=0$，构造分配

$$\vec{\beta}=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}。$$

这个 $\vec{\beta}$ 满足条件 (55:O)，从而它属于 V。但是，根据这些数量的定义，这要求 $\beta_n>\overline{\omega}$。

现在，我们令

(55:13) $\alpha_{*}=\mathrm{Min}_{i=1,\cdots,n-1}\underline{\alpha}_i$。①

(55:P) 说明：

(55:14) $\alpha_{*}\geqq n-2-\overline{\omega}$。②

---

① 这一次，最小值是针对一个有限值域计算的！——482，①

② 见(55:R)。——482，②

用 S_* 记满足

(55:15) $$\underline{\alpha}_i = \alpha_*$$

的 $i(=1,\cdots,n-1)$ 组成的集合。这个集合必定有如下两个性质：

(55:Q)　$S_* \subseteq (1,\cdots,n-1)$，$S_*$ 不是空集。

55.5.2　我们继续：

(55:R) $$\alpha_* = n-2-\overline{\omega}。$$

(55:S)　$\overline{V}$ 由这样一些元素组成：$\vec{\alpha}^i$，其中 i 取遍 S_*，且 $\vec{\alpha}^i = \{\alpha_1^i,\cdots,\alpha_{n-1}^i,\alpha_n^i\}$ 满足

$$\alpha_j^i = \begin{cases} \underline{\alpha} = \alpha_*, & j=i, \\ \overline{\omega}, & j=n, \\ -1, & \text{其他}。\end{cases}$$

(55:R)和(55:S)的证明：首先，我们考虑 $\overline{V}$ 的一个元素 $\vec{\beta}$。

如果对于所有的 $i=1,\cdots,n-1,\beta_i<\underline{\alpha}_i$，那么，(55:2)给出 $\vec{\alpha}^0$，因为 $\vec{\alpha}^0=\{\underline{\alpha}_1,\cdots,\underline{\alpha}_{n-1},\underline{\omega}\}$。由(55:K)，$\vec{\alpha}^0$ 属于 V，所以 $\vec{\alpha}^0$、$\vec{\beta}$ 都属于 V。这是不可能的。所以

(55:16)　对于某个 $i=1,\cdots,n-1,\beta_i \geqq \underline{\alpha}_i \geqq \alpha_*$。

必然有

(55:17)　$\beta_j \geqq -1, j=1,\cdots,n-1, j\neq i$，

而且，由于 $\vec{\beta}$ 属于 $\overline{V}$，

(55:18)　$\beta_n = \overline{\omega}$。

现在，$\sum_{j=1}^{n}\beta_j = 0$，而且，根据(55:14)，$-(n-2)+\alpha_*+\overline{\omega}\geqq 0$，因此，> 被从(55:16)和(55:17)的不等式中排除 483

了。所以，$\underline{\alpha}_i = \alpha_*$，即 i 属于 S_*。而且，

$$\beta_i = \begin{cases} \underline{\alpha}_i = \alpha_*, & j = i, \\ \overline{\omega}, & j = n, \\ -1, & \text{其他}, \end{cases}$$

即如上定义的 $\vec{\beta} = \vec{\alpha}^i$。

这样，我们看到：

(55:19)　　$\overline{V}$ 的每个 $\vec{\beta}$ 必然是 i 属于 S_* 的一个 $\vec{\alpha}^i$。

现在，$\overline{V}$ 不是空集，从而 V 中存在一个 $\vec{\alpha}^i$（i 属于 S_*）。所以，这个 $\vec{\alpha}^i$ 是一个分配，进而 $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i = 0$，即 $-(n-2) + \alpha_* + \overline{\omega} = 0$。这等价于(55:R)。

最后，考虑 S_* 中任意一个 i。因为(55:R)成立，我们有

$$-(n-2) + \alpha_* + \overline{\omega} = 0。$$

所以，$\sum_{j=1}^{n} = 0$，即 $\vec{\alpha}^i$ 是一个分配。但是，$\alpha_i^i = \underline{\alpha}_i = \alpha_*$，$\alpha_n^i = \overline{\omega}$，所以(55:O)保证了 $\vec{\alpha}^i$ 属于 V。而且，由于 $\alpha_n^i = \overline{\omega}$，$\vec{\alpha}^i$ 甚至属于 $\overline{V}$。即

(55:20)　　i 属于 S_* 的每个 $\vec{\alpha}^i$ 都是一个分配且属于 $\overline{V}$。

(55:19)和(55:20)合起来给出(55:S)。(55:R)已在前面得到证明。故整个证明完成。

55.5.3 这一分析的基本结果是(55:R)、(55:S)以及集合 S_* 的引入。对上面的分析进行文字总结还是可能的。①

---

① 当然，所有这些仅仅适用于情况(II)。——483，①

对于首要玩家来说，最好的可能结果赋予它一个值 $\bar{\omega}$。为此，他只需在特定玩家集合 S_* 中随意选择一个盟友。如 55.4 末尾提到的那样，这个集合由玩家 $1,\cdots,n-1$ 中这样一些玩家组成，在完全合作反对首要玩家的状态下，这些玩家的待遇最差。

因此，当玩家 $1,\cdots,n-1$ 联合起来完全战胜首要玩家的时候，在他们自己之间做出的安排决定着他实现完全胜利情况下的行为。基本上不同的情形之间的这一"相互影响"值得我们注意。[①] 还有，有意思的是，当首要玩家的目的是完全胜利时，他的自然盟友同时也是潜在反对他的联盟中待遇最差的成员。[②] 484

55.4 关于阐述和证明之间的对比的总结说明仍然适用。

55.6 情况(II)：$\mathscr{A}$ 和 S_*

55.6 我们在 55.4 和 55.5 中确定了 V 的两部分 $\underline{V}$ 和

---

① 在 4.3.3 中，我们强调过一个分配——即其属于一定行为标准(解)——的"实际"存在给相同标准的其他分配造成的影响。我们已经发现的 n≥3 的博弈的所有解都能够被用于说明这一原理。我们在 25.2.2 中特别提到了它。然而，当目前这个例子尤其引人注目。——484，①

② 用于说明这一原理的政治情形是人们熟知且与之联系着的，其一般性常常得到确认。不过，不可否认，能够找到的支持这一原理的理由又不比若干有冲突的原理的理由更为充分。

关键是，对于这一特殊博弈——即社会结构——而言，我们现在认为，这一原理成立，且没有其他原理成立。为其提供一个带有一些复杂性的数学证明是必要的。所有用文字表达的貌似合理的论述往往都是缺乏说服力的、含糊的。——484，②

$\bar{V}$。① 接下来,我们研究 V 的最后一个部分:$V_\cdot$。

令 $\mathscr{A}$ 是这样一些 $\vec{\alpha}$ 组成的集合,对于 $S_\cdot$ 中所有的 i,有 $\alpha_i = \underline{\alpha}_i = \alpha_\cdot$。那么,我们有:

(55:T) $\underline{V} \cup V^\cdot \subseteq \mathscr{A}$。

证明:考虑$\underline{V} \cup V^\cdot$ 中的一个 $\vec{\alpha}$。我们必须证明的是,对于 $S_\cdot$ 中所有的 i 来说,$\alpha_i = \underline{\alpha}_i$

现在,根据(55:L),对于所有的 $i = 1, \cdots, n-1$,有 $\alpha_i \leqq \underline{\alpha}$。因此,我们只需排除,当 i 属于 $S_\cdot$ 时,$\alpha_i < \underline{\alpha}_i$。

对于 $S_\cdot$ 中的 i,构造(55:S)的 $\vec{\alpha}^i$。它属于 $\bar{V}$,所以 $\alpha_n^i = \bar{\omega}$;$\vec{\alpha}$ 属于$\underline{V} \cup V^\cdot$,所以 $\alpha_n < \bar{\omega}$。故,$\alpha_i < \underline{\alpha}_i$ 意味着 $\alpha_i^i = \underline{\alpha}_i > \alpha_i$,所以,根据(55:1),$\vec{\alpha}^i \succ \vec{\alpha}$。这是不可能的,因为 $\vec{\alpha}^i$、$\vec{\alpha}$ 都属于 V。

(55:U) $\bar{V} \subseteq \mathscr{A}$ 的充分必要条件是,$S_\cdot$ 是一个一元集或 $\alpha_\cdot = -1$。不然,$\bar{V}$ 和 $\mathscr{A}$ 不相交。

证明:考虑 $\bar{V}$ 中的一个 $\vec{\alpha}$。那么,根据(55:S),$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^i$,$i$ 属于 $S_\cdot$。$\vec{\alpha}^i$ 和 $\mathscr{A}$ 的定义比较清楚地告诉我们,这个 $\vec{\alpha}$ 属于 $\mathscr{A}$ 的充分必要条件是,$S_\cdot$ 有惟一一个元素 i 或 $\alpha_\cdot = -1$。

485 (55:T)和(55:U)的文字上的意义是:待遇最差的组

---

① 尽管(55:Q)对集合 $S_\cdot$ 进行了限制,但它仍然是未知的。$\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_{n-1}$ 也是未知的,有约束条件(55:N)。它们确定 $\alpha_\cdot$(它们的最小值)。$\underline{\omega}$、$\bar{\omega}$ 由(55:M)和(55:R)给定。这些位置数的确定将在后面得到论述。见(55:O')[即(55:L')、(55:N')和(55:P')]。

然而,$\underline{V}$ 和 $\bar{V}$ 的形式已经被发现了,其余有待确定的东西并非基本特征。——484,③

($S_\bullet$，见 55.5 末尾)中的每位玩家在首要玩家没有取得其在完全成功的分配(即$\underline{V}\cup V^*$)中得到的最优结果。当首要玩家被完全打败(即在$\underline{V}$中)时，对于玩家 $1,\cdots,n-1$ 来说，这一点甚至也是成立的(见 55.4 末尾)。当首要玩家完全成功时，那么，这一点仅仅对于一位玩家来说成立，他可以是待遇最差的组($S_\bullet$，见 55.5)中的任何一位玩家。

55.7　情况(II′)和(II″)：(II′)的解决

55.7.1　考虑情况 $S_\bullet=(1,\cdots,n-1)$。我们将其称为情况(II′)。在这种情况下，对于所有 $i=1,\cdots,n-1$，$\underline{\alpha}_i=\alpha_\bullet$，(55:N)给出 $(n-1)\alpha_\bullet=1$，即 $\alpha_\bullet=\frac{1}{n-1}$，而且(55:R)给出 $\overline{\omega}=n-2-\frac{1}{n-1}$。如果 $\vec{\alpha}$ 属于 $\mathscr{A}$，那么，$\alpha_i=\underline{\alpha}_i=\alpha_\bullet=\frac{1}{n-1}$，$i=1,\cdots,n-1$。所以，$\alpha_n=-1$，即 $\vec{\alpha}=\left\{\frac{1}{n-1},\cdots,\frac{1}{n-1},-1\right\}$。由(55:T)，对于$\underline{V}\cup V^*$中所有的 $\vec{\alpha}$ 来说，这一点同样成立。

根据(55:K)，这个 $\vec{\alpha}$ 显然是$\underline{V}$的惟一元素 $\vec{\alpha}^0$，从而，V^*是空集。所以，$V=\underline{V}\cup\overline{V}$，而且(55:K)、(55:S)给出

(55:V)　　V 有如下元素组成：

(a) $\vec{\alpha}^0=\left\{\frac{1}{n-1},\cdots,\frac{1}{n-1},-1\right\}$，

(b) $\vec{\alpha}^i$，

其中 $i=1,\cdots,n-1$ 且

$$\vec{\alpha}^i=\{\alpha_1^i,\cdots,\alpha_{n-1}^i,\alpha_n^i\}$$

而

$$\alpha_j^i = \begin{cases} \frac{1}{n-1}, & j=i, \\ n-2-\frac{1}{n-1}, & j=n, \\ -1, & \text{其他。} \end{cases}$$

(55:V)决定了情况(II′)下的惟一可能解 V。然而，这未必意味着，这个 V 要么是一个解，要么属于情况
486 (II′)。事实上，如果这两个要求都没有得到满足，那么，我们只能间接地证明，情况(II′)下不存在解。因此，我们将证明，两个要求都得到满足。[1]

55.7.2

(55:W) (55:V)的 V 是情况(II′)下的惟一解。

证明：我们只需证明，这个 V 是情况(II′)下的一个解——其惟一性来自上述结果，即(55:V)。

情况(II′)容易得到证明：显然，对于这个 V 来说

$$\underline{\omega} = -1, \overline{\omega} = n-2-\frac{1}{n-1},$$

$$\underline{\alpha}_1 = \cdots = \underline{\alpha}_{n-1} = \alpha_* = \frac{1}{n-1}, S_* = (1, \cdots, n-1)。$$

我们剩下的任务是证明 V 是一个解，即证明 30.1.1 中的(30:5:c)。为此，我们必须确定不被 V 中的元素占优的分配 $\vec{\beta}$。

对于 $\vec{\alpha}^0$ 来说，(55:1)被排除了，原因是 $\alpha_n^0 = -1$。所以，

---

① 这种情况有(55:G)，其中情况(I)已经得到解决。由于(55:G)从一开始就是必要的和充分的，我们没有必要在这里重新分析。——486，①

这一占优关系只能通过(55:2)来起作用,因此它等于 $\alpha_i^0 > \beta_i$,即 $\beta_i < \frac{1}{n-1}$,$i=1,\cdots,n-1$。

对于 $\vec{\alpha}^k \succ \vec{\beta}$,$k=1,\cdots,n-1$,当 $i \neq k$ 时,(55:1)被排除了,原因是 $i \neq k$ 时,$\alpha_i^k = -1$。这样,这个占优关系只能通过有 $i=k$ 的(55:1)起作用,因此它等于 $\alpha_j^k > \beta_j$,$j=k,n$,即 $\beta_k < \frac{1}{n-1}$,$\beta_n < n-2-\frac{1}{n-1}$。

所以,$\vec{\beta}$ 不被 V 的元素占优的充分必要条件是:$\beta_i \geq \frac{1}{n-1}$对于某个 $i=1,\cdots,n-1$ 成立,而且它甚至在 $\beta_n < n-2-\frac{1}{n-1}$的情况下对所有这些 i 成立。

因此,$\beta_n < n-2-\frac{1}{n-1}$的必要条件是 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-1} \geq \frac{1}{n-1}$。另外,$\beta_n \geq -1$。所以,$\sum_{i=1}^{n}\beta_i = 0$ 意味着这些≥只能取 =,即 $\vec{\beta} = \vec{\alpha}^0$。另一方面,$\beta_n \geq n-2-\frac{1}{n-1}$的必要条件是 $\beta_i \geq \frac{1}{n-1}$对于某个 $i(=1,\cdots,n-1)$且对于 j 的其他 $n-2$ 个取值有 $\beta_j \geq -1$。因此,$\sum_{i=1}^{n}$ 再次使这些≥关系取 =,即 $\vec{\beta} = \vec{\alpha}^i$。

如此,不被 V 占优的 $\vec{\beta}$ 是 $\vec{\alpha}^0$ 和 $\vec{\alpha}^1,\cdots,\ \vec{\alpha}^{n-1}$,它们恰 487
好是 V 的元素。

55.7.3　这个解十分重要,原因在于它是一个有限

集——如我们将要看到的那样，它是具有这个性质的惟一解。如果反对首要玩家的总联盟得以形成，那么，正如 $\vec{\alpha}^0$ 所描述的那样，$n-1$ 个参与者平等地参与该联盟。如果首要玩家找到一个盟友，那么，他给予其盟友的数额等于 $\vec{\alpha}^0$ 给予他的数额并留下其余数额，这由 $\vec{\alpha}'$，…， $\vec{\alpha}^{n-1}$ 描述。

所有这些都是合理的且没有歧视。① 无论如何，这都不是惟一的可能解，我们将在 55.3 中找出另一个解［见 (55:G)］，而且更多的解将出现在以后的章节中。

55.8 情况(II″)：$\mathscr{A}$ 和 V′占优

55.8.1 接下来，我们考虑称为情况(II″)的 $S_* \neq (1, \cdots, n-1)$。

利用(55:Q)，我们可以将此表述为：

(55:X) $S_* \subset (1, \cdots, n-1)$， S_* 不是空集。

我们也可以说：情况(II′)和(II″)的特征分别是，在反对首要的总联盟中，前者有歧视，后者无歧视。

在具体进入情况(II″)的讨论之前，我们做如下说明：

55.4—55.7 的论证是数学的，但我们在那里得到的中间结果允许简单的文字阐述。也就是说，我们有可能相对频繁地打断数学演绎，相继插入文字说明。

目前的情况则不同，一个较长的数学演绎一经开始，我们就不能随时打断，而必须进行到下一个适合文字说明的地方(55.12)。

---

① $n=3,4$ 时这个解的特殊情况是我们熟悉的：当 $n=3$ 时，它是本质三人博弈的无歧视解；当 $n=4$ 时，它是我们在 35.1 中讨论的解。——487，①

55.8.2　现在，我们给出这一演绎。

记 $V' = \mathscr{A} \cap V$（V 属于 $\mathscr{A}$ 的那一部分）。根据（55:T）和（55:U），视条件（55:U）是否得到满足，$V' = \underline{V} \cup V^{\cdot} \cup \overline{V} = V$，或 $V' = \underline{V} \cup V^{\cdot}$。

（55:Y）　　条件（30:5:c）对于属于 $\mathscr{A}$ 的 V' 来说成立。

证明：把（30:5:c）换成 30.1.1 中等价的（30:5:a）和（30:5:b）。

（30:5:a）的证明：由于 $V' \subseteq V$，而 V 的元素之间不可能相互占优，V' 的元素之间也不可能相互占优。

（30:5:b）的证明：令 $\vec{\beta}$ 属于 $\mathscr{A}$ 但不属于 V'。那么， 488
我们必定能够找到 V' 的一个 $\vec{\alpha}$ 满足 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$。

首先，$\vec{\beta}$ 甚至不属于 V。从而，V 中存在一个 $\vec{\alpha}$ 满足 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$。如果这个 $\vec{\alpha}$ 不属于 $\overline{V}$，那么，它必定属于 V'［见（55:Y）前面的说明］，而且这就证明了我们的命题。所以，我们只需从 $\overline{V}$ 排除 $\vec{\alpha}$ 即可。

假设 $\vec{\alpha}$ 属于 $\overline{V}$，即按照（55:S），$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^{k}$，$k$ 属于 S_*。我们有 $\vec{\alpha}^{k} \succ \vec{\beta}$。当 $i \neq k$ 时，（55:1）被排除了，而且（55:2）也因为 $i \neq k(i = 1, \cdots, n-1)$ 时有 $\alpha_i^k = -1$ 而被排除了。这样，这个占优关系只能通过 $i = k$ 时的（55:1）起作用，从而它意味着 $\alpha_k^k > \beta_k$，即 $\beta_k < \underline{\alpha}_k = \alpha_*$。然而，这是不可能的，因为 $\vec{\beta}$ 属于 $\mathscr{A}$。

55.8.3　因此，我们现在的任务是找出所有 $\mathscr{A}$ 的解［即所有满足 30.1.1 中的（30:5:c）的集合］。这必然要求确定 $\mathscr{A}$ 中占优关系的本质。

（55:Z）　　　　对于 $\mathscr{A}$ 中的 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$，$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 等价于 $\alpha_n > \beta_n$

且对于$(1,\cdots,n-1)-S_*$中的某个i，$\alpha_i>\beta_i$。

证明：对于$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$，当$i$属于$S_*$时，(55:1)被排除了，而且，对属于$S_*$的所有$k$来说，(55:2)也因为$\alpha_k=\beta_k(=\underline{\alpha}_k=\alpha_*)$而被排除了。

这样，这一占优关系只能通过i属于$(1,\cdots,n-1)-S$时的(55:1)起作用。这意味着，$\alpha_n>\beta_n$，且$\alpha_i>\beta_i$。

我们已经把全部分配组成的集合换成了$\mathscr{A}$，而且把(55:A)中描述的占优的概念换成了(55:Z)中描述的占优关系。不然的话，寻找全部解的问题就是原来的同一问题。我们的进步是，如我们将会看到的那样，(55:Z)中的占优概念较(55:A)中的占优概念更容易应用。

55.9 情况(II″)：V′的确定

55.9.1 令p是S_*中元素的个数。

我们有：

(55:A′) $$1\leqq p\leqq n-2。$$

证明：这是(55:X)的直接结果。

(55:B′) $$-1\leqq\alpha_*<\frac{1}{n-1}。$$

证明：$-1\leqq\alpha_*$是显见的。接下来，对于S_*中的i，$\alpha_i=\alpha_*$；对于$(1,\cdots,n-1)-S_*$中的i，$\alpha_i>\alpha_*$。而且，根
489 据(55:A′)，这些集合都不是空集。所以，$\sum_{i=1}^{n-1}\underline{\alpha}_i>(n-1)\alpha_*$，从而，(55:N)给出$1>(n-1)\alpha_*$，$\alpha_*<\frac{1}{n-1}$。

$\mathscr{A}$中的一个$\vec{\alpha}$有p个固定的分量：当i属于S_*时，α_i

($=\underline{\alpha}_i=\alpha_*$)；$n-p$ 个变动的分量：α_i，i 属于 $(1,\cdots,n)-S_*$。这些分量满足如下条件：

(55:21)　　$\alpha_i \geqq -1$，　i 属于 $(1,\cdots,n)-S_*$，

且 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$，即

(55:22)　　$\sum_{i\text{属于}(1,\cdots,n)-S_*}\alpha_i=-p\alpha_*$。

(55:21)中的下限加起来小于(55:22)中设定的和，即 $-(n-p)<-p\alpha_*$。事实上，这意味着 $\alpha_*<\frac{n-p}{p}=\frac{n}{p}-1$。再由(55:A′)，$p<n-1$，所以 $\frac{n}{p}-1>\frac{n}{n-1}-1=\frac{1}{n-1}$，且(55:B′)保证 $\alpha_*<\frac{1}{n-1}$。

这样，我们有：

(55:C′)　　域 $\mathscr{A}$ 是 $(n-p-1)$ 维的。

55.9.2　下面，我们详细分析 V′和 $\mathscr{A}$。①

令

(55:23)　　$\omega^*=n-p-1-p\alpha_*$。

根据(55:R)，我们能够写

(55:24)　　$\omega^*=\overline{\omega}-(p-1)(\alpha_*+1)$。

(55:D′)　　$\omega^*=\overline{\omega}$ 的充分必要条件是，S_* 是一个一

---

① 后面的引理(55:D′)—(55:P′)是 47.5.2—47.5.4 的几何演绎的等价分析。技术背景有所不同，但两种证明之间的类似总归是十分显著的——有兴趣的读者可以一步步模仿它们。

(55:C′)表明，几何讨论只能在 $(n-p-1)$ 维空间中进行[根据(55:A′)，这 $\geqq 1,\leqq n-2$]。这正是我们使用分析法的理由。(上面所指几何证明是在一个平面中进行的，即它要求维数是 2。)——489，①

维集合（即 $p=1$）或 $\alpha_*=-1$，即当且仅当（55:U）的条件没有得到满足。否则，$\omega^* < \overline{\omega}$。

证明：根据（55:A′）和（55:B′），$p \geqq 1$，$\alpha_* \geqq -1$，（55:24）直接给出我们想要的结果。

（55:E′）　$\mathrm{Max}_{\vec{\alpha} \text{属于} \mathscr{A}} \alpha_n = \omega^*$。

490 （55:F′）　这个最大值恰好由 $\mathscr{A}$ 中的一个 $\vec{\alpha}$ 取得：

$$\vec{\alpha}^* = \{\alpha_1^*, \cdots, \alpha_{n-1}^*, \alpha_n^*\}$$

$$\alpha_i^* = \begin{cases} \alpha_i = \alpha_*, & i \text{ 属于 } S_*, \\ \omega^*, & i = n, \\ -1, & \text{其他。} \end{cases}$$ ①

（55:E′）和（55:F′）的证明：显然，根据 $\mathscr{A}$ 的定义，对于 $\mathscr{A}$ 中的 $\vec{\alpha}$ 来说，在可变分量 α_i[i 属于（$1,\cdots,n-1$）$-S_*$]取得它们的最小值时，可变分量 α_n 取得其最大值。这些最小值是 -1。所以，对于这个最大值来说，

$$\alpha_i = \begin{cases} \underline{\alpha}_i = \alpha_*, & i \text{ 属于 } S_*, \\ -1, & i \text{ 属于 } (1,\cdots,n-1) - S_*\text{。} \end{cases}$$

现在，$\alpha_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i = -p\alpha_* + (n-1-p) = n-p-1-p\alpha_*$。由（55:23），这意味着 $\alpha_n = \omega^*$。

我们的结论得证。

---

① 这个定义与（55:D′）的比较告诉我们，这个 $\vec{\alpha}^*$ 是 i 属于 S 的一个 $\vec{\alpha}^i$——即它属于 $\overline{V}$——的充分必要条件是（55:U）得到满足。

由于 $\vec{\alpha}^*$ 属于 $\mathscr{A}$，这与（55:U）的结果一致。——490，①

(55:G′)　　　　$\vec{\alpha}^{\cdot}$ 属于 V′。

证明：对于 $\mathscr{A}$ 的任何 $\vec{\alpha}$，$\vec{\alpha}^{\cdot}$ 属于 $\mathscr{A}$，(55:E′)和(55:F′)给出

$$\alpha_n \leqq \alpha_n^{\cdot}\ (=\omega^{\cdot})。$$

这样，(55:Z)排除了 $\vec{\alpha} \succ \vec{\alpha}^{\cdot}$，从而(55:Y)必然要求 $\vec{\alpha}$ 属于 V′。

55.9.3 有了这些准备之后，接下来是我们的演绎的关键部分：

(55:H′)　　如果 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 属于 V′，那么，$\alpha_n=\beta_n$ 意味着 $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$。

证明：考虑 V′中 $\alpha_n=\beta_n$ 的 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$。

令 $\gamma_i=\mathrm{Min}(\alpha_i,\beta_i)\ (i=1,\cdots,n-1,n)$ 并假设 $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i<0$，如 $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i=-\varepsilon,\varepsilon<0$。

令 $\vec{\delta}=\{\delta_1,\cdots,\delta_{n-1},\delta_n\}$，其中

$$\delta_i=\begin{cases}\gamma_i, & i\ \text{属于}\ S_{*},\\ \gamma_i+\dfrac{\varepsilon}{n-p}, & i\ \text{属于}(1,\cdots,n-1,n)-S_{*}。\end{cases}$$

这个 $\vec{\delta}$ 显然是一个分配，而且，当 i 属于 S_* 时，有 $\delta_i=\gamma_i=\alpha_i=\beta_i=\underline{\alpha}_i=\alpha_*$，所以 $\vec{\delta}$ 属于 $\mathscr{A}$。我们有 $\delta_n>\gamma_n=\alpha_n=\beta_n$，而且，对于 i 属于$(1,\cdots,n-1)-S_*$，$\delta_i>\gamma_i=\alpha_i$ 或 β_i，因此 $\vec{\delta}\succ\vec{\alpha}$ 或 $\delta\succ\vec{\beta}$。因为 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 属于 V'，这把 $\vec{\delta}$ 从 V'中排除了。所以，V′中存在一个 $\vec{\eta}$，$\vec{\eta}\succ\vec{\delta}$。 491

现在，根据(55:Z)，$\eta_n>\delta_n$，且对于$(1,\cdots,n-1)-S_*$ 中的 i，$\eta_i>\delta_i$。更不容置疑的是，$\eta_n>\delta_n>\gamma_n=\alpha_n=\beta_n$，$\eta_i>\delta_i>\gamma_i=\alpha_i$ 或β_i。因此，$\vec{\eta}\succ\vec{\alpha}$ 或 $\vec{\eta}\succ\vec{\beta}$。而 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 和 $\vec{\eta}$

都属于 V′，这显然矛盾。

所以，$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i<0$ 是不可能的，这样

(55:25) $$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i \geqq 0。$$

现在，$\gamma_i\leqq\alpha_i$，$\gamma_i\leqq\beta_i$ 且 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i=0$。因此，(55:25)使这些≦关系变成=关系，即 $\gamma_i=\alpha_i=\beta_i$。这证明了 $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$。

(55:I′) 对于 V′中所有 $\vec{\alpha}$，α_n 的值正好构成区间

$$-1\leqq\alpha_n\leqq\omega^*,$$

证明：对于 V′中的一个 $\vec{\alpha}$，$\alpha_n\geqq-1$ 是显见的事实，而且 $\alpha_n\leqq\omega^*$ 是(55:E′)的结果。所以，我们只需证明不存在满足如下条件的 y_1：

$$-1\leqq y_1\leqq\omega^*,$$

且对于 V′中的所有 $\vec{\alpha}$，$\alpha_n\neq y_1$。

V′中肯定存在着某个 $\vec{\alpha}$，$\alpha_n\geqq y_1$：事实上，根据(55:G′)，$\vec{\alpha}^*$ 属于 V′，且 $\alpha_n^*=\omega^*\geqq y_1$。构造

$$\text{Min}_{\vec{\alpha}属于V',\alpha_n\geqq y_1}\alpha_n=y_2,$$ ①

---

① 在这种情况下，不必构造严格最小值，但那样的话，与我们在下面使用的方法相比，达到这一目的的过程要长一些。这个最小值是能够构造的，即它的确存在且被取得，像第 384 页脚注①中那样，这一点是能够断定的。特别应注意那里的(*)部分。那里关于 V 说的事情对于 $\mathscr{B}$ 中的类似集合 V′来说同样成立，对于 V′与满足 $\alpha_n\geqq y_1$ 的 $\vec{\alpha}$ 组成的封闭集的交集来说也同样成立。

正是出于这一封闭性需要，我们必须使用条件 $\alpha_n\geqq y_1$ 而不适用 $\alpha_n>y_1$，虽然我们的真正目的在于后者。但是，在我们正在考虑的情况中，这两者将被认为是等价的。[见(55:26)。]——491，①

而且在 V′中选择一个有 $\alpha_n^+ \geqq y_1$ 的 $\vec{\alpha}^{\cdot}$，对于这个 $\vec{\alpha}$，上述最小值被取得：$\alpha_n^+ = y_2$。根据（55：H′），这个 $\vec{\alpha}^{\cdot}$ 具有惟一性。 492

这样，$y_2 \geqq y_1$，而且，由于必然有 $\alpha_n^+ \neq y_1$，那么，$y_2 \neq y_1$，即

(55:26)　　$y_1 < y_2$。

由 y_2 的定义得：

(55:27)　　对于不属于 V′的 $\vec{\alpha}$，$y_1 \leqq \alpha_n < y_2$。

现在，令 $y_1 = y_2 - \varepsilon$，$\varepsilon > 0$ 并构造分配

$$\vec{\beta} = \{\beta_1, \cdots, \beta_{n-1}, \beta_n\}。$$

其中，$\beta_n = \alpha_n^+ - \varepsilon = y_2 - \varepsilon = y_1$，对于 S_* 中的 i，$\beta_i = \alpha_i^+ = \alpha_i = \alpha^*$；对于 $(1, \cdots, n-1) - S_*$ 中的 i，$\beta_i = \alpha_i^+ + \dfrac{\varepsilon}{n-1-p}$。

显然，$\vec{\beta}$ 属于 $\mathscr{A}$ 且 $\beta_n = y_1$ 把 $\vec{\beta}$ 排除在 V′之外。所以，V′中存在一个 $\vec{\gamma}$ 满足 $\vec{\gamma} \succ \vec{\beta}$。

根据(55:Z)，这意味着 $\gamma_n > \beta_n$ 且对于 $(1, \cdots, n-1) - S_*$ 中的 i，$\gamma_i > \beta_i$。

由(55:27)，$\gamma_n > \beta_n = y_1$ 必然要求 $\gamma_n > y_2$。根据(55:27)，$\gamma_n = y_2$ 就意味着 $\vec{\gamma} = \vec{\alpha}^{\cdot}$。所以，对于上述属于 $(1, \cdots, n-1) - S_*$ 的 i，$\gamma_i = \alpha_i^+ < \beta_i$，而不是我们希望的 $\gamma_i > \beta_i$。故，$\gamma_n > y_2$。

因此，对于上述属于 $(1, \cdots, n-1) - S_*$ 的 i，$\gamma_n > y_2 = \alpha_n^+$ 且 $\gamma_i > \beta_i > \alpha_i^+$。所以，$\vec{\gamma} \succ \vec{\alpha}^{\cdot}$。但是，$\vec{\gamma}$、$\vec{\alpha}^{\cdot}$ 都属于 V′，这构成了矛盾。

55.9.4　由(55：I′)和(55：H′)，我们看到：对于每

个 γ，

$$-1 \leqq \gamma \leqq \omega^*,$$

V'中存在惟一一个 $\vec{\alpha}$ 有 $\alpha_n = \gamma$。将这个 $\vec{\alpha}$ 记为

$$\vec{\alpha}(\gamma) = \{\alpha_1(\gamma), \cdots, \alpha_{n-1}(\gamma), \alpha_n(\gamma)\}。$$

显然，$\alpha_n(\gamma) = \gamma$，且当 i 属于 S_* 时，$\alpha_i(\gamma) = \alpha_i = \alpha_*$。所以，真正有意义的函数是 $\alpha_i(\gamma)$，i 属于 $(1, \cdots, n-1) - S_*$。

将这一结果与(55:I')结合起来给出：

(55:J')　　V'由如下元素：

$$\vec{\alpha}(\gamma)$$

组成，其中 γ 取遍区间

$$-1 \leqq \gamma \leqq \omega^*,$$

493 而且 $\vec{\alpha}(\gamma) = \{\alpha_1(\gamma), \cdots, \alpha_{n-1}(\gamma), \alpha_n(\gamma)\}$ 满足

$$\alpha_i(\gamma) = \begin{cases} \alpha_i = \alpha_*, & i \text{ 属于 } S_*, \\ \gamma, & i = n, \\ \gamma(\text{和 } i)\text{的一个适宜函数，} & \\ \quad \text{其中 } i \text{ 属于}(1, \cdots, n-1) - S_*。 & \end{cases}$$

55.9.5　最后，

(55:K')　　当 i 属于 $(1, \cdots, n-1) - S_*$ 时，(55:J')的函数 $\alpha_i(\gamma)$ 满足如下条件：

(55:K':a)　　$\alpha_i(\gamma)$ 的定义域是区间

$$-1 \leqq \gamma \leqq \omega^*。$$

(55:K':b)　　$\gamma_1 \leqq \gamma_2$ 意味着 $\alpha_i(\gamma_1) \geqq \alpha_i(\gamma_2)$。①

(55:K':c)　　$\alpha_i(-1) = \underline{\alpha}_i$。

---

① 即 $\alpha_i(\gamma)$ 是 γ 的一个反单调函数。——493，①

(55:K':d)　　$\alpha_i(\omega^*) = -1$。

(55:K':e)　　$\sum_{i\text{属于}(1,\cdots,n-1)-S_*} \alpha_i(\gamma) = -p\alpha_* - \gamma$。①②

证明:(55:K':a)的证明:这一结果包含在(55:J')中。 494

(55:K':b)的证明:相反,对于$(1,\cdots,n-1)-S_*$中的某个i,假设:$\gamma_1 \leqq \gamma_2$且$\alpha_i(\gamma_1) \leqq \alpha_i(\gamma_2)$。这排除了$\gamma_1 = \gamma_2$,

---

① 我们可以从这些关系中得出函数$\alpha_i(\gamma)$[i属于$(1,\cdots,n-1)-S_*$]的连续性。事实上,我们甚至能够证明得更多,即所谓利普希茨(Lipschitz)条件:

(55:28)　　$|\alpha_i(\gamma_2) - \alpha_i(\gamma_1)| \leqq |\gamma_2 - \gamma_1|$。

证明:这一关系是关于γ_1、γ_2对称的,所以我们可以假设$\gamma_1 \leqq \gamma_2$。现在,把(55:K':e)应用于$\gamma = \gamma_1$和$\gamma = \gamma_2$并相减得

$$\sum_{i\text{属于}(1,\cdots,n-1)-S_*} \{\alpha_i(\gamma_1) - \alpha_i(\gamma_2)\} = \gamma_2 - \gamma_1。$$

根据(55:K':b),所有这些加数$\alpha_i(\gamma_1) - \alpha_i(\gamma_2)$都$\geqq 0$,因此它们也都$\leqq$它们的和$\gamma_2 - \gamma_1$。故,

$$0 \leqq \alpha_i(\gamma_1) - \alpha_i(\gamma_2) \leqq \gamma_2 - \gamma_1。$$

这些不等式也清楚表明,中项是$|\alpha_i(\gamma_2) - \alpha_i(\gamma_1)|$且最后一项是$|\gamma_2 - \gamma_1|$。所以,我们有

$$|\alpha_i(\gamma_2) - \alpha_i(\gamma_1)| \leqq |\gamma_2 - \gamma_1|。$$

读者将会注意到,我们从不假设连续性,我们证明了它!从技术角度看,这是相当有意思的。——493,②。

② 注意,(55:K':c)和(55:K':d)并不与(55:K':e)冲突。事实上:

当$\gamma = -1$时,(55:K':e)给出$\sum_{i\text{属于}(1,\cdots,n-1)-S_*} \alpha_i(-1) = -p\alpha_* + 1$,从而(55:K':c)要求$\sum_{i\text{属于}(1,\cdots,n-1)-S_*} \alpha_i = -p\alpha_* + 1$,$\sum_{i=1}^{n-1} \underline{\alpha}_i = 1$,与(55:N)一致。

当$\gamma = \omega^*$时,(55:K':e)给出$\sum_{i\text{属于}(1,\cdots,n-1)-S_*} \alpha_i(\omega) = -p\alpha_* - \omega^*$,从而(55:K':d)要求$-(n-p-1) = -p\alpha_* - \omega^*$,$\omega^* = n-p-1-p\alpha_*$,与(55:23)一致。——493,③

所以 $\gamma_1<\gamma_2$。那么，$\vec{\alpha}(\gamma_2)\succ\vec{\alpha}(\gamma_1)$ 是不可能的，因为 $\vec{\alpha}(\gamma_1)$ 和 $\vec{\alpha}(\gamma_2)$ 都属于 V′。

（55：K′：c）的证明：这是 $\vec{\alpha}^{\circ}$ 属于 V′这一事实的重述，事实上，它属于$\underline{V}$。［见（55：K），（55：M）。］

（55：K′：d）的证明：这是 $\vec{\alpha}^{\cdot}$ 属于 V′这一事实的重述［见（55：G′）］。

（55：K′：e）的证明：$\vec{\alpha}(\gamma)$ 是一个分配，所以有 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\gamma)=0$。

由（55：J′），这意味着，$\sum_{i\text{属于}(1,\cdots,n-1)-S_{\cdot}}\alpha_i(\gamma)+p\alpha_{\cdot}+\gamma=0$，

即 $\sum_{i\text{属于}(1,\cdots,n-1)-S_{\cdot}}\alpha_i(\gamma)=-p\alpha_{\cdot}-\gamma$。

55.10 情况（II′）的解决

55.10.1 55.8—55.9 中的结果包含着解 V 的完全描述。事实上：正如我们在 55.8.2 的开头看到的那样，$V=V'\cup\overline{V}$，虽然加数 $\overline{V}$ 可以被忽略（因为它 $\subseteq V'$）的充分必要条件是，条件（55：U）得到满足。$\overline{V}$ 如（55：S）描述的那样，而 V′则如（55：J′）描述的那样。这些描述中使用了参数

$$\underline{\alpha}_i(i=1,\cdots,n-1),\alpha_{\cdot},S_{\cdot},\overline{\omega},\omega^{\cdot}),$$

$$\alpha_i(\gamma)[i\text{ 属于}(1,\cdots,n-1)-S_{\cdot},-1\leqq\gamma\leqq\omega^{\cdot}],$$

这些参数服从的约束条件是 55.5.1 中的（55：N）、（55：13）和（55：15）；55.9.2 中的（55：R）、（55：23）和（55：24）；（55：K′）。

由于这部分内容长达七节，为了方便，我们把这些结果全部集中重述如下：

(55:L′)

(55:L′:a)　　S_*是一个集合$\subset(1,\cdots,n-1)$且不是空集。令 p 是 S_*的元素个数,那么,$1\leqq p\leqq n-2$。

(55:L′:b)　　$\underline{\alpha}_1,\cdots,\underline{\alpha}_{n-1}$是$\geqq -1$的数,有 $\sum_{i=1}^{n-1}\underline{\alpha}_i=1$。

(55:L′:c)　　对于 S_*中所有的 i,$\underline{\alpha}_i=\alpha_*$,对于$(1,\cdots,n-1)-S_*$中所有的 i,$\underline{\alpha}_i>\alpha_*$。

(55:L′:d)　　令 $\overline{\omega}=n-2-\alpha_*$,$\omega^*=n-p-1-p\alpha_*$,那么,$\overline{\omega}-\omega^*=(p-1)(\alpha_*+1)$。

(55:L′:e)　　$\alpha_i(\gamma)$是对于$(1,\cdots,n-1)-S_*$中的 i 495
定义的,

$$-1\leqq\gamma\leqq\omega^*。$$

这些函数满足条件(55:K′:a)—(55:K′:e)。

V 由如下元素组成:

(a):$\vec{\alpha}(\gamma)$,其中,γ 取遍区间 $-1\leqq\gamma\leqq\omega^*$,且

$$\vec{\alpha}(\gamma)=\{\alpha_1(\gamma),\cdots,\alpha_n(\gamma)\},$$

有

$$\alpha_i(\gamma)=\begin{cases}\alpha_i=\alpha_*, & i\text{ 属于 }S_*,\\ \gamma, & i=n,\\ (55:\mathrm{L}':\mathrm{e})\text{ 的 }\alpha_i(\gamma), & i\text{ 属于}(1,\cdots,n-1)-S_*。\end{cases}$$

(b):$\vec{\alpha}^i$,其中,i 取遍全部集合 S_*且

$$\vec{\alpha}^i=\{\alpha_1^i,\cdots,\alpha_{n-1}^i,\alpha_n^i\}$$

有

$$\alpha_j^i=\begin{cases}\underline{\alpha}_i=\alpha_*, & j=i,\\ \overline{\omega}, & j=n,\\ -1, & \text{其他。}\end{cases}$$

说明：如果 $p=1$，（S_* 是一个一元集）或 $\alpha_* = -1$，那么，$\overline{\omega}=\omega^*$ 且（b）的 $\vec{\alpha}'$ 等同于 $\gamma=\omega^*$ 时（a）的 $\vec{\alpha}(\gamma)$。如果情况不是这样，即 $p\geqq 2, \alpha > -1$，那么，$\overline{\omega}>\omega^*$ 且（b）的 $\vec{\alpha}'$ 与（a）的 $\vec{\alpha}(\gamma)$ 不相交。

读者不难验证，所有这些命题都是前述结果的重述。

55.10.2 （55：L′）必须有类似（55：V）那样的分析。我们必须研究是否得自（55：L′）的 V 都是解且属于情况（II′）。它们之中同时满足这两个条件的解形成情况（II′）中全部解的完备系。我们将证明，（55：L′）的全部 V 的确满足这些条件。

（55：M′）　（55：L′）的 V 恰好是情况（II′）中的全部解。

证明：我们只需证明的是，（55：L′）的每个 V 是情况（II′）中的一个解——这些 V 恰好是得自（55：L′）的全部这类解。

情况（II′）容易得到证明：显然，对于这个 V 来说，
496 $\underline{\omega}=-1$，且（从 55.2—55.5 中给出的它们的定义的意义上说）恰好是（55：L′）中由这些记号赋予的数量①，所以，根据（55：L′：a），

$$S_* \subset (1, \cdots, n-1)。$$

现在，我们只需证明 V 是一个解。在目前情况下，我们将通过证明 V 满足 30.1.1 中的（30：5：a）和（30：5：b）来完成这一任务。

（30：5：a）的证明：假设 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$，$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 属于 V。我们必

① $\overline{\omega}$ 得自（b），$\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 得自 $\gamma=-1$ 时的（a），从而 α_*，S_* 得自（55：L′：c）。——496，①

须区别 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 属于(55:L′)的(a)和(b)中的哪一种情况。有四种可能的组合:

$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 属于(a):即 $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}(\gamma_1)$,$\vec{\beta}=\vec{\beta}(\gamma_2)$,从而 $\vec{\alpha}(\gamma_1)\succ\vec{\alpha}(\gamma_2)$。当 i 属于 S_* 时,(55:1)被排除了,而且,当 i 属于 S_* 时,$\alpha_i(\gamma_1)=\alpha_i(\gamma_2)=\underline{\alpha}_i=\alpha_*$,从而(55:2)也被排除了。这样,这个占优关系只能通过 i 属于 $(1,\cdots,n-1)-S_*$ 时的(55:1)起作用。根据(55:L′:e),这意味着 $\alpha_n(\gamma_1)>\alpha_n(\gamma_2)$,$\gamma_1>\gamma_2$,且对于 $(1,\cdots,n-1)-S_*$ 中某个适宜的 i,$\alpha_i(\gamma_1)>\alpha_i(\gamma_2)$,这与(55:K′:b)矛盾。

$\vec{\alpha}$ 属于(a),$\vec{\beta}$ 属于(b):即 $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}(\gamma)$,$\vec{\beta}=\vec{\alpha}^i$($i$ 属于 S_*),从而 $\vec{\alpha}(y)\succ\vec{\alpha}^i$。现在,(55:1)被排除了,原因是 $\alpha_n(y)=\gamma\leqq\omega^*\leqq\overline{\omega}=\alpha_n^i$;由于 $\alpha_i(\gamma)=\alpha_i^i=\underline{\alpha}_i=\alpha_*$,(55:2)也被排除了。这样,我们有一个矛盾。

$\vec{\alpha}$ 属于(a),$\vec{\beta}$ 属于(b):即 $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}^i$($i$ 属于 S_*),$\vec{\beta}=\vec{\alpha}(\gamma)$,从而 $\vec{\alpha}^i\succ\vec{\alpha}(\gamma)$。现在,$\alpha_i^i=\alpha_i(\gamma)=\underline{\alpha}_i=\alpha_*$ 且当 $j\neq i,n$ 时,$\alpha_j^i=-1\leqq\alpha_i(\gamma)$,即 $\alpha_j^i\leqq\alpha_j(\gamma)$,$j=1,\cdots,n-1$。这同时排除了(55:1)和(55:2),从而给出一个矛盾。

$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 属于(b):即 $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}^i$,$\vec{\beta}=\vec{\alpha}^k$($i$、$k$ 属于 S_*),从而 $\vec{\alpha}^i\succ\vec{\alpha}^k$。现在,$\alpha^n=\alpha_n^k=\overline{\omega}$,与(55:B)矛盾。

(30:5:b)的证明:假设 $\vec{\beta}$ 不被 V 的元素占优。我们希望证明的是,这意味着 $\vec{\beta}$ 属于 V——这就证明了(30:5:b)。

首先,我们假设 $\beta_n\geqq\overline{\omega}$。如果对于所有的 $i=1,\cdots,n-1$,总有 $\beta_i<\underline{\alpha}_i=\alpha_*$,那么,$\vec{\alpha}(-1)\succ\vec{\beta}$,与我们的假设

矛盾。所以,对于某个 $i=1,\cdots,n-1$,$\beta_i \geqq \underline{\alpha}_i$。现在,(55:R)的证明中使用的论述表明,必然有 i 属于 S_* 且 $\vec{\beta}=\vec{\alpha}^i$。所以,在这种情况下,$\vec{\beta}$ 属于 V。

497 接着,我们假设 $\beta_n<\overline{\omega}$。如果对于 S_* 中的某个 i,$\beta_i<\underline{\alpha}_i=\alpha_*$,那么,$\vec{\alpha}^i \succ \vec{\beta}$ 显然与我们的假设矛盾。所以,对于 S_* 中的所有的 i,总有 $\beta_i \geqq \underline{\alpha}_i=\alpha_*$。

现在,$\sum_{i=1}^{n}\beta_i=0$ 给出 $\beta_n=-\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i \leqq n-p-1-p\alpha_*=\omega^*$,即 $-1 \leqq \beta_n \leqq \omega^*$。令 $\gamma=\beta_n$。

假设对于$(1,\cdots,n-1)-S_*$中所有的 i,总有 $\beta_i \geqq \alpha_i(\gamma)$,那么,我们显然有 $\beta_i \geqq \alpha_i(\gamma)$,$i=1,\cdots,n$。(对于 S_* 中的 i 和 $i=n$,我们甚至有 $=$,见上。)所以,$\sum_{i=1}^{n}\beta_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\gamma)=0$ 必然要求这些 $\geqq$ 关系只取 $=$。故,$\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}(\gamma)$。进而,在这一子情况中,$\vec{\beta}$ 也属于 V。

最后一种可能情况是,对于$(1,\cdots,n-1)-S_*$中某个适宜的 i,$\beta_i<\alpha_i(\gamma)$。(从 $\gamma=\beta_n$ 到某个 $\gamma>\beta_n$)γ 的充分小增加将不影响关系 $\beta_i<\alpha_i(\gamma)$。① 对于这个新的 γ,我们有 $\gamma>\beta_n$,$\alpha_i(\gamma)>\beta_i$,从而 $\vec{\alpha}(\gamma) \succ \vec{\beta}$ 与我们的假设矛盾。

这样,所有可能情况都被考虑到了。

55.11 完全结果的重新阐述

55.11.1 由我们的问题划分出来的三种情况(Ⅰ)、

---

① $\alpha_i(\gamma)$是连续的! 见第 493 页脚注③。——497,①

(II′)、(II″)已经分别由(55:G)、(55:W)、(55:M′)完全解决了。现在,让我们看一看解的这些分类在什么程度上相互联系着。

在(55:L′)——即描述情况(II′)时,(55:M′)——中出现的参数中,未确定的是集合 S_*。根据(55:L′:a),除(1,⋯,$n-1$)和⊖之外,它是⊆(1,⋯,$n-1$)任何集合。这就提出了这样一个问题,被排除的情况 $S_*=(1,\cdots,n-1)$ 和 S_* 是否也能够有某种解释呢?

关于 $S_*=(1,\cdots,n-1)$,答案是容易的。如果我们使用这个 S_*[忽略(55:L′:a)],那么,[利用(55:L′)的其余部分]我们得到:根据(55:L′:a),$p=n-1$;根据(55:L′:b),(55:L′:c),$\underline{\alpha}_1=\cdots=\underline{\alpha}_{n-1}=\alpha_*=\dfrac{1}{n-1}$;根据(55:L′:d),$\overline{\omega}=n-2-\dfrac{1}{n-1}$,$\omega^*=-1$。不存在引入(55:L′:c)函数 $\alpha_i(\gamma)$ 的机会,原因是(1,⋯,$n-1$)$-S_*$ 是空集。在区间 $-1\leqq\gamma\leqq\omega^*$[在(55:L′:e)的(a)中]起作用的范围内,我们必须要注意的是,它缩成了点 $\gamma=-1$(因为 $\omega^*=-1$)。现在,与(55:V)的比较告诉我们,在这些条件下,(55:L′)与(55:V)一致。

这样,我们有: 498

(55:N′)　如果我们在(55:L′:a)中把(1,⋯,$n-1$)(因此 $p=n-1$)包括进去,那么,(55:L′)穷举情况(II′)和(II″)中的全部解:情况(II′)对应着 $S_*=(1,\cdots,n-1)$,情况(II″)则对应着 $S_*\neq(1,\cdots,n-1)$。

55.11.2 有了这一结果之后，你也许倾向于把剩下的例外情况 $S_{*}=\ominus$ 与情况(I)联系起来。然而，认真研究有 $S_{*}=\ominus$ 的(55:L′)并将其与(55:G)比较表明，这是不可能的，至少不能以这种直接方式联系起来。

事实上：利用有 $S_{*}=\ominus$ 的(55:L′)(因此 $p=0$)给出一个空的(b)，如此，一个 V 与(a)一致，即 V 是全部

$$\vec{\alpha}(\gamma)=\{\alpha_1(\gamma),\cdots,\alpha_{n-1}(\gamma),\gamma\}$$

的集合，其中，$-1\leqq\gamma\leqq\omega^{*}$，取适宜的函数 $\alpha_1(\gamma),\cdots,\alpha_{n-1}(\gamma)$。忽略其他微小的变化①，我们要注意：在这一安排下，V 中一个 $\vec{\alpha}$ 的 α_n 决定其 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$；然而，在(55:G)中，$\alpha_n$ 是一个常数且

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$$

是随意的！②

总之：

(55:O′) 所有的解都是由(55:G)——情况(I)——和(55:N′)——情况(II′)和情况(II″)——枚举的。当(55:L′:a)被扩展到包含所有 $S_{*}\subsetneq(1,\cdots,n-1)$ 且 $S_{*}\neq\ominus$ 时，(55:N′)与(55:L′)一致。排除 $S_{*}=\ominus$ 是必要的。这一选择会产生一个不是

---

① 鉴于 $p=0$，(55:23)给出 $\bar{\omega}-\omega^{*}=-(\alpha_{*}+1)$，从而，我们可以有 $\omega^{*}>\bar{\omega}$，所以 $\text{Max}_{\vec{\alpha}\text{属于V}}\alpha_n=\text{Max}_{-1\leqq\gamma\leqq\omega^{*}}\gamma=\omega^{*}$，尽管它应该是 $\bar{\omega}$！

当 $S_{*}\neq\ominus$ 时，(55:L′:b)，(55:L′:c)给出 $\text{Min}_{i=1,\cdots,n-1}\underline{\alpha}_i=\alpha_{*}$；当 $S=\ominus$ 时，它们给出 $\text{Min}_{i=1,\cdots,n-1}\underline{\alpha}_i>\alpha_{*}$，尽管前者是 α_{*} 的定义！——498，①

② $S=\ominus$ 时(55:L′)的 V 不是得自我们对解的列举的一个集合，从而它根本不是解。本来，验证这一点并非难事。——498，②

(55:G)的解的 V,且事实上它根本就不是解。

55.11.3 我们以如下结果来结束这一部分:

(55:P′)

(55:P′:a)　在情况(II′),即 $S_{\cdot}=(1,\cdots,n-1)$,$p=n-1$ 时,我们有:$\omega^{*}=-1$,即(55:L′:e)的区间 $-1\leqq\gamma\leqq\omega^{*}$ 缩成了一个点。另外,$\alpha_{\cdot}=\frac{1}{n-1}$。

(55:P′:b)　在情况(II″),即 $S_{\cdot}\subset(1,\cdots,n-1)$,$p<n-1$ 时,我们有 $\omega^{*}>-1$,即(55:L′:e)的区间 $-1\leqq\gamma\leqq\omega^{*}$ 并不缩成一个点。另外,$\alpha_{\cdot}<\frac{1}{n-1}$。

证明:(55:P′:a)的证明:我们已经在(55:N′)中证明了这些说法。 499

(55:P′:b)的证明:在(55:B′)的证明中,我们看到,$\alpha_{\cdot}<\frac{n-p}{p}$,因此,$\omega^{*}+1=n-p-p\alpha_{\cdot}>0$,$\omega^{*}>-1$。$\alpha_{\cdot}<\frac{1}{n-1}$是(55:B′)中说过的事情。

55.12 结果的解释

55.12.1 下面,我们解释这一结果。出于两个理由,我们很难做到详尽:第一,包含在(55:O′),即(55:G)、(55:K′)和(55:L′)中的最后结果非常复杂,因此一个严格的陈述只能是数学的陈述而非口头的陈述,而且,

口头说明无法恰当地处理数学结果所表达的若干细微差别;第二,我们仍然缺乏透彻解释目前这种情况所必需的经验和观察力。正如我们在 54.1.2 和 54.3 中预先设定的那样,我们正在以某些有意义的方式分析典型 n 人博弈。但是,我们在确定其全部解方面所取得的成功仍然是一件孤立的事情(尽管有 54.2.1 的情况)。在真正详尽解释典型 n 人博弈之前,会有很多这样的讨论。

给出一定的解释总归是有益的,我们不求全面。我们已经在前面的若干例子中看到,这样的解释对于理论的进步有指导意义。另外,这一过程的确有助于我们理解十分复杂的数学结果的含义。

由于我们并不追求全面,我们用几点说明来给出我们的解释。

55.12.2 第一:(55:G)中描述的情况(I)的解是一个无穷分配集。(55:L′)中描述的(II″)的解也是这样[见(55:N′)],因为其中的 y 的取值范围是一个没有缩为一个点的区间。[见(55:P′:b)。]另一方面,正如我们在 55.7 末尾看到的那样,情况(II′)的解是一个有限分配集。[1] 这个解的另一个吸引人的性质是,它具有该博弈的充分对称性,即它在玩家 $1,\cdots,n-1$ 的置换下保持不变。

因此,以若干方式,它是我们的博弈的最简单解。关于其特殊情况 $n=3,4$(分别见第 22 节和 35.1)的试探性

① 读者可以比较(55:P′:a)和(55:P′:b)。——499,①

分析导致了这个解，而且不难将其开展到一般的 n。① 要找出其他解，我们只需机械照搬我们的正式理论。

至此，读者应该充分清楚的一点是，这些其他解无论如何都不能被忽视。另外，一个有限解的存在性和惟一性是目前这一博弈中一个有利的偶然事情，根本不具有一般性。② 500

55.12.3 第二：上述解对应着最大的 S_*：$(1,\cdots,n-1)$。另一个极端情况是与 $S_*=\ominus$有关的解［见(55:O′)］。这是(55:G)中描述的情况(I)中的解。与上一点说明中的解类似，它具有该博弈的充分对称性。事实上，这两种情况——(I)和(II′)——是仅有的具有对称性的情况。③

---

① （试探性）论述也许会这样进行：首要玩家需要一个盟友以取得胜利，在任何这样一个联盟条件下，他获得 $n-2$。因此，如果他希望留下数额 ω（这对应着我们的严格演绎中的 $\bar{\omega}$），他能够向每个盟友让出 $n-2-\omega$。如果他的 $n-1$ 个潜在的盟友合起来能够得到大于这一数额的量，即如果

$$(n-1)(n-2-\omega)<1,$$

那么，他找到一个盟友的机会就被破坏了，而且这是他进行勒索时受到的惟一限制。

因此，ω 仅仅受到 $(n-1)(n-2-\omega)\geqq 1$ 的限制，即 $\omega\leqq n-2-\frac{1}{n-1}$。所以，$\omega=n-2-\frac{1}{n-1}$。

这样，如果首要玩家成功建立一个联盟，那么，他得到 $n-2-\frac{1}{n-1}$；如果他失败了，他当然得到 -1。对于其他玩家来说，相应的数额是$\frac{1}{n-1}$和 -1。

现在，读者能够验证，这正是(55:V)中得到的解，即情况(II′)。——499，②

② 有关存在性的不确定性，见 53.2.2 中第二点说明。缺乏惟一性的一个例子见 38.3.1。——500，①

③ 其他解都属于情况(II″)，从而有 $S_*\neq\ominus,(1,\cdots,n-1)$。所以，玩家 $1,\cdots,n-1$ 的适当置换将把 S_* 的一个元素变成不属于 S_* 的元素，从而改变 S_* 以及相应的解。——500，②

另一方面，这个解是无穷的。正如我们在55.3中看到的那样，它表达的是这样一个组织原理，即从33.1意义上说，该博弈中的首要玩家被隔离了。(55:G)告诉我们，这一行为标准——即解绝对不提供其他玩家之间的分配原理——即首要玩家收到预先规定的数额的所有分配都属于这个解。按照常识，这完全合理：首要玩家被排除了，其他玩家只能全体相互一致地联合起来。他们的关系中的所有数量研究（即加入首要玩家的联盟的可能性）都被禁止了，无法知道他们之间讨价还价的具体结果会是什么。

55.12.4 第三：其余解是(55:L')[见(55:N')]中描述的情况(II")中的那些解，即$S_* \neq \ominus$，$(1,\cdots,n-1)$时的解。与上面两个解相比，它们形成一组更为复杂的解。事实上，它们占据了我们的数学演绎的相当大部分，也是最复杂的一部分。它们的解释也更加困难和复杂。我们将只提一提其中的要点。

我们在(55:L')中详细描述了，在这类行为标准的所有分配——即解——中，$(1,\cdots,n-1)-S_*$中的玩家与首要玩家之间的因果联系。也就是说，他们得到的数额惟一地取决于设定给首要玩家的数额。这一联系表达为有限个函数。[1] 这些函数能够以多种不同方式选取，从而产生不同行为标准——即解，但有限个行为标准意味着这些函数的有限个选择。因此，在第二点说明中至关重要的是，玩家$1,\cdots,n-1$的互不相关性消失了。显然，在首要玩家

501

---

① $\alpha_i(y)$，i属于$(1,\cdots,n-1)-S_*$。——501，①

和$(1,\cdots,n-1)-S_*$中的玩家之间持续存在着某种不确定的讨价还价[1],后一类玩家之间的关系却完全由行为标准决定。

值得再次强调的一点是第二点说明中描述的情况与当前情况之间的不同,即情况(I)与(II″)之间的不同。在前一种情况下,除首要玩家之外,全体玩家之间存在着讨价还价,不存在有关这些讨价还价的规则或关系[2],以致没有这方面的行为标准。现在,我们有首要玩家与某些其他玩家之间的讨价还价,但这一次,行为标准为首要玩家的对手们提供了有限多个相互关系和规则。相应地,存在着可能的行为标准的多样性。

如上面讨论的那样,情况(I)和(II″)中产生的性质上的未确定性是我们在 47.8 和 47.9 中研究的那种未确定性的较一般形式。那里关于那些解的二维(区域)和一维(曲线)部分的说明也分别适用于我们这里的情况(I)和(II″)。

为这一区别提供一个有某种合理性的文字论述是可能的,但它们远不可信。单单数学演绎就给出了真正理由,其相对复杂性表明,要将其转换为普通文字必定十分困难。这是如下现象的另一个例子:结果能够被表达出来,却几乎没有文字证明。

55.12.5　第四:其余玩家,即S_*中的玩家的境况也有其有意思的方面。

(55:L′)告诉我们,我们的解中的每个分配中,要么这

---

① 这对应着(55:L′:e)中γ的可变动性。也可参见(55:P′:b)。——501,②

② 为被隔离的首要玩家设定的数额除外。——501,③

些玩家都得到数额 α_*，要么他们中的一个得到 α_* 而其他的得到数额 -1。我们可以从这一点直接推断：

(a) 如果 S_* 是一个一元集，那么，S_* 中的那个玩家总是得到同一数额：α_*。

(b) 如果 $\alpha_* = -1$，那么，S_* 的每一玩家总是得到相同数额：-1。

(c) 如果情况既不是(a)，也不是(b)，即(55:U)的条件[也是(55:D′)中提到的条件]得到满足，那么，

502 S_* 中的每位玩家总得到两个不同的数额 α_* 和 -1 之一，且两者都不能被忽略。[1]

根据这些，我们能够得出如下解释性结论：

(d) 在情况(a)和(b)之中，而不是在情况(c)中，S_* 的玩家从 33.1 的意义上说被隔离了。

(e) S_* 是一个一元集的情况(a)：$S_* = (i)$，$i = 1, \cdots, n-1$，表达的是玩家 i 独自被隔离。赋予他的值 α_* 受到的限制是(55:B′)：

(55:29) $$-1 \leqq \alpha_* < \frac{1}{n-1}。$$

这是对第二点说明中描述的首要玩家被隔离的情况(I)的一个令人满意的补充。[2] 那里赋予首要玩家的值 $\overline{\omega}$ 受到的限制是(55:G)：

(55:30) $$-1 \leqq \overline{\omega} < n - 2 - \frac{1}{n-1}。$$

(f) 如果 S_* 不是一个一元集，那么，在情况(a)、(b)

---

① 即两者都在解中的某个分配中出现。——502，①

② 这解决了第 475 页脚注③中指出的困难。——502，②

之中，惟一可能的情况是(b)：$\alpha_* = -1$。

换句话说：

如果一个以上的玩家被隔离了，那么，他们的集合必定不包含首要玩家，也不同时包含所有其他玩家，且被隔离的玩家必须都被赋予下面的值：

(55:31)　　$\alpha_* = -1$。

(g) 我们从(e)、(f)得出，能够被隔离的这些玩家集合恰好是 L 中的集合[①]——失败集合。

(h) 如果只有一位玩家被隔离了，那么，(e)说明，他不一定会受到绝对不利的歧视。也就是说，他可能被赋予大于 -1 的值。(55:29)和(55:30)还指出了这个设定值的上限能够是什么：显然，这个玩家将会得到的数额与第一点说明中讨论的情况(I)的有限解中的数额相同。[②] 十分令人满意的是，这把 33.1.2 的结果从 $n=3$ 推广到了任意的 n。

(i) 另一方面，如果有一个以上玩家被隔离了[③]，那么，(55:31)表明，不可能存在让步：他们必须都被给予绝对最小值 -1。

---

① 这一点的最好证明方法是回忆 52.3 中情况 C_{n-1} 中 W 的元素的枚举。——502，③

② 对于首要玩家来说是 $n-2-\frac{1}{n-1}$，对于其他玩家来说是 $\frac{1}{n-1}$。设定值必须小于这些数额。——502，④

③ 即 S_* 中的元素个数 $p \geqq 2$。由于 $p \leqq n-2$[见(55:L:a)]，这种情况只能发生在 $n-2 \geqq 2$，即 $n \geqq 4$ 时。这也正是 $n=3$ 的讨论中不曾观察到(i)和(j)的现象的理由。——502，⑤

503 (j)这一断言必须在如下程度上成立:如果$S_\cdot$有一个以上的元素,(55:29)的$\alpha_\cdot$仍旧可能——事实上,有(55:B′)的(55:L′)明确允许它们。但是,$S_\cdot$中的玩家的境况由(c)描述,不能再称被隔离:他们可以加入联盟以改善他们的处境。

显然,这些说明,尤其是(g)、(h)、(i)有待进一步说明。然而,我们将限于这些说明,并有机会再次回到这个话题。

55.12.6 第五:我们找到了大量解,它们由众多参数描述,其中一些甚至是有相当大的选择自由的函数。然而,其主要分类却十分简单:它受到集合$S_\cdot \subseteq (1,\cdots,n-1)$的影响。[1] $S_\cdot, -S_\cdot$显然穷尽了$I=(1,\cdots,n)$分为两个集合的全部拆分。很有可能,这是一个一般原理的第一个指标。在一个简单博弈中,分为两个互补集合的分拆似乎决定所有事情,因为其中之一必然是胜利的,而另外一个必然是失败的。在一般博弈中,分为更多集合的分拆也许同样重要。无论如何,$S_\cdot$在目前这一特殊情况中的作用是,提供了全部博弈的一般分类准则的初步想法。

不过,现在我们还没有资格给这一猜想一个严格的形式。

---

① 如第二点说明中那样,我们用$S_\cdot = \ominus$记情况(I),尽管有(55:O′)前面的讨论。——503,①

第 11 章　一般非零和博弈

56. 理论的扩展

56.1　问题描述

56.1.1　我们的分析已经达到了有可能放弃零和假设的阶段。我们曾一度将这一条件放宽到分析常数和——一个不等于零的和——博弈，但是，这不是零和情况的真正有意义扩展，因为这些博弈通过策略等价这一同构而联系到零和博弈（见 42.1 和 42.2）。现在，我们要放弃对和的所有约束条件。 504

我们在前面指出过，零和约束大大弱化了博弈与经济问题之间的联系。[①] 具体来说，它强调的是分配问题，忽

① 应该注意，零和博弈不仅包括娱乐性的游戏（见 5.2.1），而且它们中的很多也相当充分地描述着社会关系。回想我们曾经在不同地方给出的解释，读者会充分意识到这一说法的正确性。

因此，零和博弈与非零和博弈之间的区别在一定程度上反映的是纯社会问题与社会—经济问题之间的区别。（正文中的下一句表达的也是这一概念。）——504，①

略了真正的生产问题(尤其见第34页脚注②以及5.2.1)。在一人博弈情况下,这一点尤为清楚:这种情况下的行为显然仅仅是一个生产问题,不存在玩家之间的分配。事实上,在零和情况下,一人博弈根本就不是个问题,而且在非零和情况下,它完全是一个最大值问题(见12.2.1)。

相应地,把理论扩展到全部非零和博弈的计划将使我们更加接近熟悉的经济问题。在下面的讨论中,读者很快就会看到例子选择方面的这一倾向以及解释方面的变化:我们将开始研究双边垄断、寡头垄断、市场等。

56.1.2 正如我们在42.1中指出的那样,彻底放弃零和约束意味着,11.2.3中描述一个博弈的函数 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 完全不受任何约束。即11.4和25.1.3中的

$$(56:1) \qquad \sum_{k=1}^{n} H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n) \equiv 0$$

505 被放弃,并且没有任何其他约束来代替它。因此,从此以后,我们的研究就以此为基础。

这一变化必然要求全面重新审查我们的理论及以其为基础的相应概念。当(56:1)被放弃时,特征函数、占优和解,这些概念都不再有定义。我们要强调的一个事实是,这里出现的问题是一个概念性问题,而不仅仅是第6章至第10章中以零和博弈理论为基础处理的那些技术问题。①

56.1.3 一切都必须重新从头开始,这未免有点令人

① 在这些技术问题中,有一个问题是靠特定概念的推广来解决的:常数和博弈的情况,我们将在后面再次提到它。——505,①

泄气：我们已经在这些概念和以其为基础的理论上付出了那么多努力。还有，我们面对着一个概念性问题，而且作为我们的理论基础的那些定性原理似乎无法超越零和博弈的情况。因此，这一最后推广——从零和到非零和情况的过渡——似乎要把我们前面的所有努力都付之一炬。因此，我们必须找出回避这一困难的出路。

这里，我们也许会想起 42.2 中出现的类似情形。那里，我们从零和情况向常数和情况的转变中也遇到过类似的情形，不过，困难程度轻一些。正如我们在 42.3 和 42.4 中所做那样，我们巧妙地利用策略等价同构避开了这些困难。

然而，这一特殊工具的有用性是有针对性的：策略等价把全部零和博弈族扩展到全部常数和博弈族，并且无法再扩展。（根据 42.2.2、42.2.3 或 42.3.1 的分析，这一点应该是清楚的。）

所以，我们必须另找出路，把非零和博弈理论与已有的零和博弈理论联系起来。

56.2　虚构玩家：零和扩展 $\overline{\Gamma}$

56.2.1　在进一步深入讨论之前，我们必须澄清一些术语。我们将要分析的博弈是这样的博弈，正如 56.1.2 中指出的那样，条件(56:1)被放弃，而且没有其他约束取而代之。我们称这些博弈是非零和博弈，但是，要认识到，我们的这一扩展并不想排除(56:1)恰好成立的那些博弈。因此，我们更倾向于给这些博弈一个不那么带有否定意思的名字，所以，我们称 $\mathcal{H}_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 丝毫不受约束的

博弈为一般博弈。[①]

我们已经说明了以某种方式把一般博弈理论与零和博弈理论联系起来的计划。实际上，我们可以更进一步：任一给定的一般博弈都能够被当作一个零和博弈来重新解释。

506 这似乎是一个悖论，因为一般博弈形成一个比零和博弈大得多的族。不过，我们的计划是，把一个 n 人一般博弈作为一个 $(n+1)$ 人零和博弈来解释。因此，从一般博弈到零和博弈的转变中引入的约束条件由参与者个数的增加来补偿——事实上，这是可能的。[②]

56.2.2 把一个给定的 n 人博弈当作一个 $(n+1)$ 人零和博弈重新解释的计划是一个十分简单而自然的计划。

这一计划的具体内容是引入虚构的第 $n+1$ 个玩家，假设他损失的数额正好等于其余 n 个——实——玩家总共赢得的数额，反之亦然。当然，他决不能直接影响博弈进程。

让我们对此给出数学表述：考虑一般 n 人博弈 Γ，它有 n 个玩家 $1,\cdots,n$，有 11.2.3 意义上的特征函数 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)(k=1,\cdots,n)$。我们用如下定义引入虚构玩家 $n+1$：

$$(56:2)\qquad H_{n+1}(\tau_1,\cdots,\tau_n)\equiv-\sum_{k=1}^{n}H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)。$$

变量 $\tau_1,\cdots,\tau_n$ 分别受控于实玩家 $1,\cdots n$。它们代表着他们对博弈进程的影响。由于我们倾向于使虚构玩家

① 这与 12.1.2 一致。——505，②

② 这再次说明了我们多次说过的一个原理，即参与者个数的任何增加必然带来博弈结构的推广和复杂化。——506，①

不影响博弈进程，我们也就没有引入他所控制的变量 τ_{n+1}。[①]

以这种方式，我们得到一个 $(n+1)$ 人零和博弈，称其为 Γ 的**零和扩展**，记为 $\overline{\Gamma}$。

56.3　有关 $\overline{\Gamma}$ 的特征的一些问题

56.3.1　说到我们已经把一般 n 人博弈当作一个 $(n+1)$ 人博弈 $\overline{\Gamma}$ 来重新解释时，乍一看，我们是说，有关 $\overline{\Gamma}$ 的全部理论对于 Γ 来说也成立。这一说法需要详细研究。

我们必须理解，这不可能是一个纯粹的数学分析，不可能像前面几章中的分析那样基于确定的理论。我们正在分析一个假设中的理论基础。因此，这一分析必须以具有表面合理性的论述为主，中间也许混杂着辅助性的数学分析。这种情形类似于我们建立零和二人、三人、n 人博弈理论的做法。（关于二人零和博弈，见 14.1—14.5 及 17.1—17.9；关于三人零和博弈，见第 5 章；关于 n 人零和博弈，见 29、30.1 和 30.2；关于一般 n 人博弈——即 $\overline{\Gamma}$ 的理论与 Γ 的理论之间的关系，对等节次是从 56.2—56.12。）

我们的分析结果是，适用于 Γ 的不是 $\overline{\Gamma}$ 的全部理

---

① 11.2.3 形式化描述为每位玩家 k 提供了变量 k。（为了用现在的情况代替它，我们必须用 $n+1$ 替代那里的 n。）因此，你可以坚持虚构玩家 $n+1$ 的变量 τ_{n+1} 的出现。

这个要求容易得到满足。为此，我们只需引入一个仅取一个值（即令 $\beta_{n+1}=1$）τ_{n+1}。实际上，只要 $H_{n+1}(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 独立于 τ_{n+1}，你甚至能够使用 τ_{n+1} 的任何值域（即任意的 β_{n+1}），以保证它们实际上是正文中使用的函数 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$。——506，②

论——即作为30.1.1中的一个$(n+1)$人零和博弈——而是其有待我们确定的一部分。换句话说，我们将会发现，将被解释为Γ的解的，不是$\overline{\Gamma}$的全部解所组成的系，而仅仅是其一个特定的子系。

56.3.2 虚构玩家是被当作一个数学工具引入的，目的是使玩家得到的数额之和等于零。因此，绝对基本的一点是，他不应该对博弈进程产生任何影响。正如56.2.2中给出的那样，在$\overline{\Gamma}$的定义中，我们也观察到了这一原则。无论如何，我们还是要为自己提出这样一个问题：虚构玩家是否被绝对排除在与这一博弈有关的交易了呢？

这一警告并不多余。一旦$\overline{\Gamma}$中包括三个或更多个人[①]，正如我们在分析的早期阶段就已经看到过的那样，联盟就在该博弈中占据主导地位。虚构玩家参与任何一个联盟——其中大概会包括玩家之间的补偿性支付——完全与我们将其引入时的精神相悖。具体来说：虚构玩家根本不是一个玩家，仅仅是服务于形式目的的一个形式上的工具而已。只有在他不以任何直接或间接的方式参与该博弈时，这才是允许的。一旦他真正参与其中，将其引入该博弈——即从Γ到$\overline{\Gamma}$的转变——就失去合理性了。也就是说，此时的$\overline{\Gamma}$不能被看作Γ的一个等价体，或Γ的重新解释，因为$\overline{\Gamma}$的实玩家，$1,\cdots,n$也许不得不面对Γ中不存在的危险或收益。

---

① 即当$n+1\geq 3$时。因此惟有一般一人不会遇到下面的障碍。这是与我们一再强调的这样一个事实吻合，即惟有$n=1$时，一般n人博弈才会成为一个纯粹最大值问题。——507，①

56.3.3　我们也许认为，根据虚构玩家被引入的方式，这一障碍被避开了。事实上，实玩家 1，…，n 在一局博弈结束时得到的数额

$$H_1, \cdots, H_n$$

并不依赖于他所控制的任何变量①——即他在该博弈中没有任何动机。那么，他又如何能够成为一个联盟需要的同伙呢？

乍一看，这种观点有一些道理。我们描述的条件看似使得任何实玩家联盟都不会因为虚构玩家出现与否有所不同。难道他仅仅是一个哑玩家吗？果真如此，那么，Γ 的理论就能够被用于 $\bar{\Gamma}$ 而无需其他条件。然而，情况并非如此。 508

的确，虚构玩家没有影响博弈进程的动机，不是任何联盟需要的同伙。也就是说，任何玩家或玩家团伙都不会对其加入而给其一个（正的）补偿。然而，他自己也许有兴趣找一个盟友。博弈结束时，他得到的数额——H_{n+1}——取决于其他玩家的动作——即 $\tau_1, \cdots, \tau_n$，而且，对他来说，因停止与其他玩家合作而补偿一个或多个玩家的做法也许是值得的。不要误解的重要一点是：当 Γ 进行时，即当虚构玩家真的是一个形式上的虚构时，这样的事情并不会发生；但是，如果真正进行的博弈是 $\bar{\Gamma}$，即如果虚构玩家表现得好像一个实玩家，那么，他向其他玩家发出

① 同样，他所得到的数额 $H_{n+1} = -\sum_{k=1}^{n} H_k$ 也不依赖于他所控制的变量。——507，②

补偿要约就成了必然的事情。

56.3.4 一旦虚构玩家开始向与他合作的其他玩家发出补偿要约——如我们在前面看到的那样，这等于他们不与其他玩家合作，他就成了一个需要受到考虑的因素了。他提出加入联盟的要求并要求为这一特权支付一个价格，而且他的这一心愿如同做出显著动作一样直接影响着博弈。

因此，尽管虚构玩家没有能力通过直接动作来影响博弈进程，他事实上进入了该博弈。正是这一无能为力决定着他向其他玩家提出补偿的措施并使上述机制发挥作用。

为了更好地理解这种情形，我们给出一个具体例子。

56.4 $\overline{\Gamma}$ 的运用所受到的限制

56.4.1 考虑一个一般二人博弈，其中，玩家 1、2 中的每一位都能够保证独自行动得到数额 -1，而两人合起来能够保证数额 1。把博弈规则具体化以产生这一结果并不难。[①] 做到这一点的一个特别简单的组合安排是：[②]

借助一个个人动作，每位玩家选择号码 1、2 中的一个。每位玩家都在不知道其他玩家的选择的情况下做出自己的选择。

此后，支付按如下方式进行：如果两位玩家都选择了

① 因此，我们将在 60.2、61.2 和 61.3 中看到，双边垄断就对应着这种情况。——508，①

② 这一建构应该与 21.1 中定义三人简单多数博弈时使用的结构比较，两者有一定相似之处。——508，②

号码 1，每人得$\frac{1}{2}$，否则每人得 -1。[①]

容易验证，这个博弈具有我们需要的性质。 509

现在，让我们考虑虚构玩家 3 并构造 56.2.2 中定义的博弈及其特征函数 $v(S), S\subseteq(1,2,3)$。根据我们上面的分析

$$v[(1)] = v[(2)] = -1,$$
$$v[(1,2)] = 1。$$

显然，

$$v(\ominus) = 0,$$

而且，根据（零和博弈的）特征函数的一般性质

$$v[(3)] = -v[(1,2)] = -1,$$
$$v[(1,3)] = -v[(2)] = 1,$$
$$v[(2,3)] = -v[(1)] = 1,$$
$$v[(1,2,3)] = -v(\ominus) = 0。$$

总之：

(56:3)　　当 S 有$\begin{cases}0\\1\\2\\3\end{cases}$个元素时，$v(S) = \begin{cases}0\\-1\\1\\0\end{cases}$

公式(56:3)恰好是 29.1.2 的(29:1)，即 $\overline{\Gamma}$ 是取简化型的本质三人零和博弈，$\gamma = 1$。因此，它同样等同于 21 节

---

① 用 11.2.3 的符号：$\beta_1 = \beta_2$ 且

$$H_1(\tau_1,\tau_2) = H_2(\tau_1,\tau_2) = \begin{cases}\frac{1}{2} & \tau_1 = \tau_2 = 1,\\ -1 & 其他。\end{cases}$$ ——508，③

中讨论的三人简单多数博弈。①

现在，我们从第 21—23 节的试探性讨论中学到的是，这一博弈不过是全体玩家之间进行结盟的竞争。事实上，考虑到三人简单多数博弈的实质（见 21.2.1），这是十分明显的。因此，一个虚构玩家肯定表现出强烈的结盟倾向。事实上，仅就特征函数而言，博弈 $\overline{\Gamma}$ 对其三位玩家完全对称。所以，两位实玩家 1、2 与虚构玩家 3 扮演的角色完全相同，从而我们没有理由认为他们进入联盟的能力应有所不同。②

56.4.2 我们还能够回到 56.3.3 最后一部分中使用的论点并将其运用于这一博弈：如果虚构玩家 3 在博弈 $\overline{\Gamma}$ 表现得如同一个实玩家，他就有理由阻止玩家 1、2 结成联盟，因为如果这个二人联盟得以形成，他的损失额是 -1，

510 如果这个联盟没有形成，他将赢得的数额是 2。③ 因此，他将向玩家 1 或玩家 2 提供补偿以破坏这一联盟，即使选择 τ_1 或 τ_2 的值等于 2 而不等于 1。根据第 22 节和 23 节的

① 当然，仅就其特征函数而言时，这些博弈才相同，而 30.1.1 的整个理论仅仅以特征函数为基础。——509，①

② 为避免误解，我们再次强调：博弈 $\overline{\Gamma}$ 的规则，由 H_k 充分表达，并不就其三位玩家对称。H_k 仅仅依赖于 τ_1、τ_2，并不依赖于 τ_3。就 1、2、3 对称的是特征函数 $v(S)$，$S\subseteq(1,2,3)$。但是，我们知道，惟有 $v(S)$ 才是重要的。（见上面脚注①。）——509，②

③ 根据第 508 页脚注③和(56:2)：

$$H_3(\tau_1,\tau_2) = -H_1(\tau_1,\tau_2) - H_2(\tau_1,\tau_2) = \begin{cases} -1 & \tau_1=\tau_2=1, \\ 2 & \text{其他。} \end{cases}$$

——510，①

分析，这个补偿数额是能够确定的，它等于$\frac{3}{2}$。① 读者可以自己验证这一结果，同时，这一过程导致有关三人简单多数博弈的已知结果。

56.4.3 56.4.1 的例子给出了 56.3.3 和 56.3.4 中阐述的反对观点的本质。因此，虚构玩家 $n+1$ 能够影响博弈 $\bar{\Gamma}$，其影响不是直接通过个人动作，而是间接地通过提供补偿从而改变竞相结盟的条件和结果。正如我们在 56.3.3 末尾指出过的那样，这并不意味着，这样的事情真的发生在 Γ 中，即当虚构玩家只是形式上的虚构的时候。如果 30.1.1 的理论被一字不漏地应用于 $\bar{\Gamma}$，即如果允许虚构玩家（提供补偿方面）表现得如同一个实玩家，那么，上述事情的确发生在 $\bar{\Gamma}$ 中。换句话说，最后一段分析并不意味着，我们想赋予虚构玩家与我们将其引入的初衷相悖的影响力。它们仅仅有助于说明，把我们当初的理论僵硬地运用于 $\bar{\Gamma}$ 会使我们面对这样的冲突。因此，我们不得不得出这样的结论：零和博弈 $\bar{\Gamma}$ 无法被当作一般博弈 Γ 的一个无条件等价物。

接下来，我们该做什么呢？为了回答这个问题，我们最好回到 56.4.1 的具体例子的分析，那里，困难得到了充分的表达。

---

① 这是阻止（与虚构玩家 3 结盟的）玩家 1 或 2 从损失 −1 转到赢得$\frac{1}{2}$的补偿，后者是玩家 1 或 2 在一个二人联盟——玩家 1 和 2 的联盟——中本可以得到的收益。它也使虚构玩家的收益从 2 减少到$\frac{1}{2}$，这是其应有的收益。——510，②

56.5 两种可能的过程

56.5.1 我们也许认为，根据56.4.1中的研究，不使用特征函数，以此来避开当前的困难。事实上，博弈 $\overline{\Gamma}$ 与三人简单多数博弈之间的相同仅仅在于它们有相同的特征函数——联盟形成的机制相同，但它们的 H_k 并不相同（尤其见第509页脚注①、②）。因此，一个可能的适宜做法是放弃惟有特征函数重要的说法，并把理论建立在 H_k 本身之上。

然而，详细研究发现，这一建议似乎没有什么优点——至少对于我们正在考虑的问题来说是这样。

首先：放弃特征函数 v(S) 转而热衷于潜在的 H_k 会使
511 我们失去处理这一问题的所有手段。对于零和博弈来说，除了30.1.1中完全以 v(S) 为基础的理论之外，我们没有其他一般理论。因此，接受这一计划就会使我们从一般博弈 Γ 到零和博弈 $\overline{\Gamma}$ 的过渡完全没有意义，因为这会使我们像当初在一般博弈面前那样，在零和博弈面前也手足无措。因此，只有在实在找不出出路的情况下，放弃全部现有理论才是合理的。然而，这两个条件都不具备。

第二：从特征函数退回到 H_k 并不会遇到前面提到的反对意见。事实上，在56.3.2末尾和56.4.2中，我们的确把 H_k 考虑进去过。我们证明了 $\overline{\Gamma}$ 的虚构玩家直接提出补偿的必要性——这一必要性并不以任何方式依赖于 $\overline{\Gamma}$ 被换成一个有着相同特征函数的不同博弈。①

---

① 我们在56.4.1中多次使用了这样的替换，但不是在56.4.2的后续论述中使用这样的替换。——511，①

第三:后面的讨论表明,我们没有必要放弃以特征函数为基础的理论,而是通过对其使用范围加以简单约束来克服其缺陷。

56.5.2 重新思考 56.3.2—56.4.2 告诉我们,我们没有理由把我们当前有关虚构玩家的行为的困难都归罪于 30.1.1 的理论。

56.3.2—56.3.4 和 56.4.2 的分析都是试探性的。在 56.4.2 情况下,这一点尤其重要,那里,我们以确定的方式就一个具体例子得到了不希望看到的结果。事实上,56.4.2 的研究提到的是第 21—23 节中本质三人零和博弈的“准备性的”试探性讨论,而不是第 32 节中的严格理论。

那里——56.4.2 和 56.4.1 中——发生的事情能够用严格理论描述如下:56.4.1 的一般二人博弈 Γ 导致一个三人零和博弈 $\overline{\Gamma}$,它与三人简单多数博弈相同。30.1.1 的严格理论提供了这一博弈的各种解,33.1 对这些解进行了分类和研究。现在,56.4.1 和 56.4.2 的分析等于从这些解中选择了一个特殊的解:33.1.3 的无歧视解。

因此,我们必须自问:恰恰选择这个无歧视解是否合理呢?难道这些解中就没有一个能够绕开阻挡我们前进道路的解——即 33.1.3 意义上的有歧视解吗?

56.6 有歧视的解

56.6.1 假如我们从任何角度逼近了本质三人零和博弈——即三人简单多数博弈,而且我们必须从其解中选择一个,那么,我们有强有力的理由选择无歧视的那个。 512
这个解——即它所代表的行为标准——给予三位玩家同

等完成结盟的机会,而且在没有歧视动机的情况下,我们倾向于认为这个解是该博弈最"自然的"解。①

然而,在当前情况下,进行歧视的理由是充分的:在博弈Γ中,玩家1、2是实玩家,是Γ的最初参与者,而玩家3如我们一再强调的那样只不过是形式上的虚构。在前面几段的讨论中,我们已经强调过,这位玩家不应该竞争加入一个联盟,而且他也不应该享有其他玩家的待遇。换句话说:如果我们想把30.1.1的理论运用于这种情况,那么,歧视虚构的玩家3是绝对必要的,即选择33.1中的一个所谓有歧视解,被排斥的玩家是虚构玩家3。

同上,我们看到,这些有歧视解是由这样一个事实描述的,即在所有的解中,被排斥的玩家——即没有资格竞争加入一个联盟的玩家——都被赋予一个固定的数额c。33.1.2的分析告诉我们,这个数额也不一定是这个被排斥的玩家独自能够保有的最小数额,即未必有$c=-1$。实际上,c能够从一个特定的区间中选取:$-1 \leqq c < \frac{1}{2}$。

56.6.2 这里,我们要简单评述在最坏情况下——即$c=-1$时——排斥虚构玩家的有歧视解。根据33.1.1,这个解恰好由这样一些分配组成,在这些分配中,虚构玩家3得到的数额是-1,而且两个实玩家中的每一个得到的数额都$\geqq -1$。

① 当然,从30.1.1意义上说,其他解也一样好,但上述说法毕竟更为合理。——512,①

正如我们在 33.1.1 中指出的那样，这意味着，解——即行为标准——并不以任何方式限制两位实玩家之间的成果分配。那里给出的理由现在仍然成立且更为基本：玩家 1、2 之间的讨价还价完全不受限制，不仅因为接受的行为标准排斥了玩家 3 的介入——在玩家 1、2 的关系中这是惟一的规范影响，而且还有着更好的理由，即玩家 3 并不存在。不难看出，这去除了这样一种威胁，即玩家 1 或 2 在没有得到"公平份额"时愤然离开并转而与玩家 3 合作并从中得到补偿的威胁。

56.7　其他情况

56.7.1　下面，我们继续 56.6.1 末尾的讨论。

一个问题是，我们是否应该坚持 $c=-1$ 或允许其在 $-1\leqq c<\frac{1}{2}$ 中变化？前者似乎更为合理。事实上，$c>-1$ 意味着，实玩家没有尽最大可能剥夺虚构玩家，即他们没有努力得到尽可能大的（总）收益。你也许把这一自我克制看作按照公认的稳定行为标准而支付给虚构玩家的一个补偿。而且，因为我们已经决定排除联盟相互作用和补偿中虚构玩家的任何参与，禁止上述自我克制也是合理的。 513

然而，我们必须承认，这一论点并不总是有说服力。由虚构玩家支付的一个（正的）补偿与支付给虚构玩家的补偿是性质上不同的事情。前者明显错误，因为虚构玩家并不存在，从而不支付补偿。相反，后者并不荒谬。它只不过表达了利用可能的集体优势时的克己，而且我们有若

干例子说明一个稳定的行为标准能够要求这样的行为。[①]这样的克己不属于我们当前要考虑的问题，这一点并非一个先验的事实。[②] 将其排除则意味着，在完全信息情况下，一个稳定的行为标准必然意味着最大集体利益的实现。熟悉现有社会学文献的读者知道，关于这一点的讨论远没有定论。

无论如何，在我们的理论框架之内，我们将成功地解决这一问题，证明 c 必须被限制于其最小值。[③]

56.7.2 然而，暂时地，我们必须同时发展这两种可能情况。

为此，我们回到一般 n 人博弈 Γ 和与之相应的 $(n+1)$ 人零和博弈 $\overline{\Gamma}$。现在，我们能够严格描述相关概念了。

(56:A:a) 用 Ω 记 $\overline{\Gamma}$ 的全部解 $\overline{V}$ 组成的集合。

(56:A:b) 给定一个常数 c，用 Ω_c 记 $\overline{\Gamma}$ 的这样一些解组成的系，对于 $\overline{V}$ 的每个分配 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}\}$，总有 $\alpha_{n+1}=c$。[④]

---

① 当然，这恰恰是表达 33.1.2 的可能性的另一种方式。一个四人零和博弈中的另一个例子是在 38.3.2 的(38:F)中给出的。46.11 中对于全部可分解博弈给出了一个例子。(在最后这个例子中，克己是由 $\overline{\varphi}>0$ 时 Δ 的玩家和 $\overline{\varphi}>0$ 时 H 的那些玩家做出的，见 46.11。)

我们强调，这样的克己是在已接受的行为标准的压力下做出的，虽然我们的理论中假设玩家们充分知道该博弈的可能结果。——513，①

② 然而，如果它出现了，它通常会被看作社会组织的一种无效形式，虽然它是稳定的。——513，②

③ 问题中不出现克己现象，最大社会利益总是得到实现。这一结果并不像其表面看来那样有力，因为我们正假设着一个数字的和不受约束地可转换的效用函数以及完全信息。——513，③

④ 即在这个解的所有分配中，虚构玩家总得到数额 c。——513，④

(56:A:c)　　用 Ω'记全部集合 Ω_c 的并集。 514

(56:A:d)　　用 Ω''记 $c = \mathrm{v}[(n+1)] = -\mathrm{v}[(1,\cdots,n)]$时的 Ω_c。①

结合(56:A:c),我们注意到:

对于某个 c,Ω_c 是空集。在构造 Ω'时,这些 c 显然可以被忽略。因此,$\alpha_{n+1} \geqq \mathrm{v}[(n+1)] = -\mathrm{v}[(1,\cdots,n)]$必然要求 $c \geqq -\mathrm{v}[(1,\cdots,n)]$,不然的话,$\Omega_c$ 是空集。再有,

$$\alpha_{n+1} = -\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \leqq -\sum_{k=1}^{n}\mathrm{v}[(k)]$$

必然要求 $c \leqq -\sum_{k=1}^{n}\mathrm{v}[(k)]$,不然的话,$\Omega$ 也是空集。所以,c 满足如下约束条件:

(56:4)　　$-\mathrm{v}[(1,\cdots,n)] \leqq c \leqq -\sum_{k=1}^{n}\mathrm{v}[(k)]$。

实际中,Ω 常常受到更为严厉的约束。② (56:A:d)的 Ω''属于(56:4)的最小的 c。

56.8 新结构

56.8.1 56.3.2—56.4.3 的分析表明,Ω 的解对 Γ

---

① 即在这个解的全部分配中,虚构玩家只得到这样一个数额,即便他一人敌对全部其他玩家,他也能够得到这一数额。如我们所知,这意味着,实玩家合起来得到最大集体利益。——514,①

② 因此,在本质三人零和博弈中,(56:4)给出

$$-1 \leqq c \leqq 2,$$

而 32.2.2 告诉我们,Ω_c 非空时,c 的严格值域是

$$-1 \leqq c < \frac{1}{2}。——514,②$$

来说并非都有意义。56.6.1 的分析进一步缩小了这些解的范围，但它留下了一个尚未回答的问题：全部有意义的解的系是否是 Ω'或 Ω''？

因此，系 Ω' 和 Ω''对应着我们在前面提到的两种选择。

接下来，我们要继续讨论 Ω'和 Ω''之间的区别。

考虑博弈 $\overline{\Gamma}$ 的分配

(56:5) $$\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}\}。$$

分量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$中，前面 n 个分量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 表达的是现实：实玩家 $1,\cdots,n$ 就要从这一分配得到的数额。另一方面，最后一个分量 α_{n+1}表达的是一个虚运算：赋予虚构
515 玩家 $n+1$ 的数额。另外，分量 α_{n+1}不仅在 $\overline{\Gamma}$ 的解释中是虚的，数学上它也是没有必要的，即如果 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 被给定了，它也就被决定了。事实上（由于分配 $\vec{\alpha}$ 的全部分量之和必须等于 0），

(56:6) $$\alpha_{n+1}=-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k。$$

所以，我们宁愿通过指定其分量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 来表达 $\vec{\alpha}$，时刻牢记 α_{n+1}能够得自(56:6)。因此，我们写

(56:7) $$\vec{\alpha}=\{\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\}。$$

注意，我们不打算用这一符号取代原来的符号，即我们希望视情况需要自由地使用(56:5)和(56:7)。事实上，正是为了避免双重符号可能带来的误解，我们才在(56:7)中使用双括号{{　　}}而不像(56:5)那样用单括

号{　}。①

56.8.2　(56:5)形式上的分配 $\vec{\alpha}$ 服从零和约束，而且满足如下约束：

(56:8)　　$\alpha_i \geqq \mathrm{v}[(i)],\quad i = 1, \cdots, n, n+1$。

我们必须就(56:7)[有(56:6)]表达(56:8)。

现在，对于 $i = 1, \cdots, n$，(56:8)并不受从(56:5)到(56:7)的过渡的影响，但对于 $i = n+1$，我们必须利用(56:6)。这样，它变成

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqq -\mathrm{v}[(n+1)] = \mathrm{v}[(1, \cdots, n)]。$$

从而，(56:8)变成了： 516

(56:9)　　$\alpha_i \geqq \mathrm{v}[(i)],\quad i = 1, \cdots, n$;

(56:10)　　$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqq \mathrm{v}[(1, \cdots, n)]$。

---

① 当然了，我们本来就能够做到这一点，即我们能够对于最初的 n 人零和博弈做到这一点。这里，要确定一个分配

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

只要对任意给定的 i_0，给定其分量 $\alpha_i (i \neq i_0,)$，因为

$$\alpha_{i_0} = -\sum_{i \neq i_0}^{n} \alpha_i。$$

与此相似，我们在 31.2.1 中的(31:I)中看到，本质 n 人零和博弈形成一个 $(n-1)$ 维多面体，而不是一个 n 维多面体。

然而，回避 α_{i_0} 并没有给我们带来特别的好处，而且，即便有这样一个 i_0，我们也没有办法确定它到底是哪一个。在本质三人零和博弈的几何讨论中，我们实际上努力让全部 α_i 都出现在图形中。(见 32.1.2。)

考虑到 α_{n+1} 的特殊作用，现在的情况则完全不同。对于我们后面的演绎来说，去除 α_{n+1} 是基本的。——515，①

56.9 Γ是零和博弈情况的重新分析

56.9.1 让我们暂停片刻，对这些约束做出解释。

(56:9)并非什么新东西。它再次表达了我们关于零和博弈已经有的东西，即在任何情况下，任何一个人愿意接受的数额都不会小于他独自一人敌对全部其他玩家时能够得到的数额。然而，(56:10)第一次出现。要弄清楚它的含义，我们需要更仔细考虑数量 v[(1,⋯,n)]。

v[(1,⋯,n)]是该博弈对于由全部实玩家 1,⋯,n 组成的、与虚构玩家 $n+1$ 相敌对的复合玩家来说的值。这个复合玩家在博弈结束时得到的这个数额当然是

$$\sum_{k=1}^{n} H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)。$$

他控制着变量 $\tau_1,\cdots,\tau_n$，即出现在这一表达式中的全部变量。因此，在二人零和博弈中，实玩家控制全部动作，虚构玩家丝毫不影响博弈进程。

将这一结果与 14.1.1 中描述的二人零和博弈方案相比，我们的 $\sum_{k=1}^{n} H_k$ 对应着那里的 H，全部变量 $\tau_1,\cdots,\tau_n$ 对应着那里的一个变量 τ_1，不过，在我们的新结构中不存在与那里的变量 τ_2 相应的变动范围。

直觉上清楚的一点是，这样一个博弈（对于第一个玩家而言）的值得自就所有变量（这些变量都由他控制着）求最大值。这是我们现在的结构中的

$$(56:11)\qquad \mathrm{Max}_{\tau_1,\cdots,\tau_n} \sum_{k=1}^{n} H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n),$$

14.1.1 中相应的表达式是

(56:12)　　$\mathrm{Max}_{\tau_1} H(\tau_1,\tau_2)$　(τ_2 实际上不存在)。

当然了,第 14 和 17 节的系统化理论给出同样的结果:14.4.1 中的 v_1、v_2 相等,并等于(56:12),因为运算 Min_{τ_2} 被避免了。所以,该博弈是严格决定的,而且,从 14.4.2和 14.5 意义上说,取值(56:12)。因此,第 17 节的一般理论必然给出相同的值。 517

这样,我们有:

(56:13)　　$\mathrm{v}[(1,\cdots,n)] = \mathrm{Max}_{\tau_1,\cdots,\tau_n} \sum_{k=1}^{n} H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$。

所以,(56:10)表达的是:任何分配向全体(实)玩家提供的数额都不应该超过最有利情况下——即完全合作并使用最优策略时——能够期望的总额。①②

总之:

(56:B)　　(56:7)的分配服从下面的约束条件:

(56:B:a)　　向任何一位玩家提供的数额都绝对不会少于他一人敌对全体其他玩家时能够得到的数额[见(56:9)]。

(56:B:b)　　向全体实玩家合起来提供的数额绝对

---

① 注意,对于全体实玩家而言的最优策略显然是这样定义的:如果存在着完全合作,那么,全体玩家的整体上面对的是一个纯粹最大化问题。——517,①

② 如果最初形式的博弈——即 12.1.1 和 11.2.3 的正规化之前的博弈——包含机会动作,那么,上述"最有利的"情况绝对不能也被包括在这些讨论之中。也就是说,我们只假设了合作和策略的最优选择,而机会动作必须通过建立数学期望来考虑。事实上,正是以这种方式,我们在 11.2.3 中从

$$G_k(\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_n)$$

(τ_0 代表着全部机会动作的影响)过渡到 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$,后者是我们现在正在使用的形式。——517,②

不会大于最有利情况下——即完全合作且采取最优策略时——能够得到的数额[见(56:10)和(56:13)]。

这一表述使得我们的约束条件(56:9)、(56:10)[即(56:B:a)、(56:B:b)]的常识性的含义相当清楚:违背(56:9)[即(56:B:a)]意味着,(实)玩家之一接到这样一个要约,这一要约比他被迫做的事情更为不利。违背(56:10)[即(56:B:b)]意味着,全体(实)玩家收到这样一个要约,这个要约比它曾经能够预想的更为有利。我们似乎可以合理地认为这些恰好是这样一些条件,在这些条件下,理性的玩家将拒绝考虑一个分配方案(分配),原因是这个方案是荒谬的。

56.9.2 在继续下去之前,我们必须回顾我们走过的脚印,把我们当前的结构与前面的结构就两者都适用的情况进行比较。

特别是:假设我们正在把上一节的方法应用于一个已经是零和博弈的 n 人博弈 Γ。相应地,如 56.2.2 中描述的那样,我们就这一博弈构造 $(n+1)$ 人零和博弈 $\overline{\Gamma}$,并像 56.8.2 那样进行。

518 重要的是不要误解这一运算的含义。显然,如果 Γ 本身是一个零和博弈,那么,56.2.2 和 56.8.2 的运算完全没有必要。我们有解决这种情况的理论。但是,如果一个对于所有博弈都成立的更为一般的理论要在这个基础上建立起来,那么,我们必定要求它与旧理论在旧理论成立的范围内是一致的。也就是说,在旧理论的范围之内,新理论是不必要的,新理论必须与旧理论一致。[①]

---

① 这是众所周知的数学推广方法论原则。——518,①

56.9.3 Γ 是一个 n 人零和博弈意味着

$$\sum_{k=1}^{n} H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)=0,$$

即 $H_{n+1}(\tau_1,\cdots,\tau_n)=0$。因此，在 S 中添加或去掉虚构玩家 $n+1$ 并不影响 $v(S)$。也就是说：

(56:14)　　$v(S)=v[S\cup(n+1)],\quad S\subseteq(1,\cdots,n)$。

特殊情况 $S=\ominus,(1,\cdots,n)$ 给出

(56:15)　　$v[(n+1)]=0,$

(56:16)　　$v[(1,\cdots,n+1)]=0$。

(56:14)、(56:15) 合起来表明，博弈 $\bar{\Gamma}$ 是可分解的，有裂集 $(1,\cdots,n)$ 和 $(n+1)$。其 $(1,\cdots,n)$ 成分是最初的博弈 Γ，而虚构玩家 $n+1$ 是一个哑玩家。① (关于这一分解，见 42.5.2 末尾和 43.1。关于哑玩家，见第 340 页脚注①和 43.4.2 末尾。)

这样，我们能够看到：

56.9.4 第一：由于 $\bar{\Gamma}$ 得自 Γ 添加哑玩家，Γ 的解与 $\bar{\Gamma}$（在旧理论中）的解相互对应着，惟一的区别是后者要照顾到哑玩家（虚构玩家 $n+1$），赋予其数额 $v[(n+1)]$，即零。[见 46.9.1 或 46.10.4 中的 (46:M)。]

我们设想的新理论将从 $\bar{\Gamma}$（在旧理论中）的解中得到

---

① 请读者回忆一下，在博弈 $\bar{\Gamma}$ 中，一般来说，虚构玩家并不是一个哑玩家。这很像一个悖论，但是我们的确在 56.3 中就一般二人博弈 Γ 的特殊情况证明了这一点。事实上，这恰恰是因为博弈 $\bar{\Gamma}$ 的规则一般来说并不把他规定为一个哑玩家，以致我们必须把 $\bar{\Gamma}$ 的解 $\bar{V}$ 限制为这样一些解，在这些解中，他被限制为一个哑玩家。这是 56.3.2—56.6.2 的讨论的含义。

我们将在 57.5.2 中确定 Γ 的哪些性质是虚构玩家成为哑玩家的充分必要条件。——518，②

Γ 的解。因此，上述分析证明，要得到的 Γ 的全部新解存在于旧解之中。另外，我们看到，在这种情况下，我们能够——事实上也必须——采用 56.7.2 中(56:A:a)的整个系 Ω。然而，必须注意的一点是，在这种情况下，Ω 的全部解自动给予虚构玩家 $n+1$ 数额 $v[(n+1)]$。即，这里
519 $\Omega=\Omega_c$，$c=v[(n+1)]$，即 $\Omega=\Omega''$。[见(56:A:b)和(56:A:d)，同上]因此，在 Ω 与 Ω″之间，尤其在(56:A:c)和(56:A:d)的 Ω′与 Ω″之间，我们有可能定义的任何集合都与 Ω 一致，就我们当前的目的而言都是可以接受的。

换句话说：在这种情况下，摆在我们面前的 Ω′与 Ω″之间的选择没有实际意义。这里，两种选择都与旧理论一致。事实上，这里根本没有必要放弃旧理论。①

56.9.5 第二：对于一个 n 人零和博弈来说，旧理论中的解是以如下方式定义的：

(56:C:a) $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$；

(56:C:b) $\alpha_i\geqq v[(i)]\quad i=1,\cdots,n$；

(56:C:c) $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$。

56.8.1 中(56:7)我们的新方案与此不同。这里，我们有

(56:C:a*) $\vec{\alpha}=\{\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\}$；

而且，根据(56:9)、(56:10)以及(56:16)，

(56:C:b*) $\alpha_i\geqq v[(i)]$，$i=1,\cdots,n$；

(56:C:c*) $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\leqq 0$。

---

① 限制 Ω 的必要性是 56.5—56.6 中分析一个非零和博弈 Γ 时推导出来的。——519，①

前面的说明告诉我们，在当前情况下，旧理论与新理论之间不可能有真正的不同。① 不过，明白这样一点总是有益的：（从旧理论的角度看）（56：C：a）—（56：C：c）和（56：C：a*）—（56：C：c*）这两种方法不会有真正的不同。

这两者之间的惟一不同在于（56：C：c）和（56：C：c*）。回想 44.7.2 的定义，我们看到，（56：C：a）—（56：C：c）与（56：C：a*）—（56：C：c*）之间的不同也能够被表述为：前者等于就 $E(0)$ 考虑解；后者是就 $F(0)$ 考虑解。我们已经在 46.8.1 中注意到，0 落在博弈 Γ 的"正常"范围之内，而且，根据 45.6.1 中的（45：O：b），$E(0)$ 和 $F(0)$ 有相同解。因此，我们说明了它们完全一致。

这两点说明系统地利用了第 9 章的合成和分解理论，为的是分析计划中的新方法对零和博弈 Γ 的影响。这一方法的主要内容是从 Γ 到 $\overline{\Gamma}$ 的过渡，如我们看到的那样，这等于给 Γ 添加哑玩家。与第 9 章中研究的一般分解相比，这只是一种极为特殊的情况。相应地，与那里的较为 520
一般的定理相比，我们要用到的特殊结果本来能够更轻易得到。由于第 9 章的一般结果随时可用，更由于上述分析把我们当前的分析更清楚地建立在了适宜背景之上，我们不深入分析这个题目。

56.10　占优概念分析

56.10.1　让我们回到一般 n 人博弈 Γ，其零和扩展

① 或沿着这一思路建立起来的任一种新理论——我们尚未在 Ω′与 Ω″之间做出抉择。——519，②

博弈 $\overline{\Gamma}$ 以及 56.8 中引入的新的研究分配的方法。

肯定的一点是，一般来说，$\overline{\Gamma}$ 的全部解不能被用于定义一个令人满意的 Γ 的解。这是我们在 56.5—56.6 中通过特例分析——即决疑法——已经证明了的事情。现在，让我们系统地逐步解决这一问题，即把 30.1.1 中给出的解的正式定义应用于这一博弈并试图完全一般地确定它的哪些性质是不能令人满意的，需要修改。

为此，我们将使用 56.8.1 中新方案（57:7）中 $\overline{\Gamma}$ 的分配概念。这一计划的一个要点是，它强调实玩家在 $\overline{\Gamma}$ 中的基本重要性，即把我们的注意力更多地从 Γ 转移到 $\overline{\Gamma}$。当然，这样做并不破坏这样一个事实，即我们把 30.1.1 的正式理论应用于（$n+1$）人零和扩展博弈 $\overline{\Gamma}$，而不是将其应用于 n 人博弈 Γ（这是不可能的）。

30.1.1 的概念全部以占优为基础。因此，我们首先表述占优对于 $\overline{\Gamma}$ 的分配而言的含义。

考虑两个分配

$$\vec{\alpha}=\{\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\},\quad \vec{\beta}=\{\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}\}。$$

占优

$$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$$

意味着，存在一个非空集合 $S\subseteq(1,\cdots,n,n+1)$，它是 $\vec{\alpha}$ 的有效集，即

$$(56:17)\qquad \sum_{i\text{属于}S}\alpha_i\leqq \mathrm{v}(S),$$

使得

$$(56:18)\qquad \alpha_i>\beta_i,\ i\text{ 属于 }S。$$

我们希望只用 α_i 和 β_i（$i=1,\cdots,n$）来表达这个占优关系。

因此，有必要区别两种可能性：

56.10.2　第一：S 中不包含 $n+1$，那么，

(56:19)　　$S \subseteq (1, \cdots, n)$ 且 S 不是空集。

(56:17)和(56:18)无需重新阐释，因为它们仅仅涉及 α_i、β_i，$i=1, \cdots, n$。另外，在(56:17)的 $\mathrm{v}(S)$ 中，$S \subseteq (1, \cdots, n)$。 521

第二：S 的确包含 $n+1$。令 $T = S - (n+1)$，那么，

(56:20)　　$T \subseteq (1, \cdots, n)$，　T 有可能是空集。

条件(56:17)和(56:18)必须重新阐释，因为它们包含 α_{n+1} 和 β_{n+1}。

一个自然的做法是在 $(1, \cdots, n, n+1)$ 中构造 $-S$，即 $(1, \cdots, n, n+1) - S$；在 $(1, \cdots, n)$ 中构造 $-T$，即 $(1, \cdots, n) - T$。这两个集合显然相等，不过，它们各自都有一个符号总归是有好处的。我们用 $\perp S$ 记前者，用 $-T$ 记后者。

因为 $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 0$，所以

$$\sum_{i \text{属于} S} \alpha_i = -\sum_{i \text{属于} \perp S} \alpha_i = -\sum_{i \text{属于} -T} \alpha_i,$$

$$\mathrm{v}(S) = -\mathrm{v}(\perp S) = -\mathrm{v}(-T)。$$

从而，(56:17)变成

(56:21)　　$$\sum_{i \text{属于} -T} \alpha_i \geqq \mathrm{v}(-T)。$$

这仅仅涉及 α_i，$i=1, \cdots, n$。另外，在(56:21)的 $\mathrm{v}(-T)$ 中，$-T \subseteq (1, \cdots, n)$。接下来，(56:18)变成了

(56:22)　　$\alpha_i > \beta_i$　i 属于 T，

且

$$\alpha_{n+1} > \beta_{n+1}。$$

最后一个不等式意味着，

(56:23) $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < \sum_{i=1}^{n} \beta_i。$$

(56:22)和(56:23)也仅仅涉及 α_i 和 β_i,($i=1,\cdots,n$)。

总之:

(56:D) $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 意味着,要么

(56:D:a) 存在一个 S 满足(56:19)和(56:17)、(56:18);

要么

(56:D:b) 存在一个 T 满足(56:20)和(56:21)、(56:22)、(56:23)。

注意,这些准则仅仅涉及 $S,T,-T\subseteq(1,\cdots,n)$ 和 α_i、β_i ($i=1,\cdots,n$)。也就是说,它们仅仅涉及最初的博弈 Γ 和实玩家 $1,\cdots,n$。

522 **56.10.3** 占优准则(56:D)得自把 30.1.1 的最初定义一字不漏地直接应用于 $\overline{\Gamma}$,然后转换为 Γ 的描述。这一严格运算已经做出,让我们从解释的角度研究一下这个结果,即看一看(56:D)的条件是否产生当前情况中占优的一个合理定义。

根据(56:D),占优在(56:D:a)和(56:D:b)两种情况下都成立。

(56:D:a)只不过是 30.1.1 的最初定义的重述。① 它表达的是,存在着一组(实)玩家[(56:19)的集合 S],其中每一位玩家都认为他在 $\vec{\alpha}$ 中的个人处境优于其在 $\vec{\beta}$ 中的处境[这是(56:18)],而且他们知道他们能够作为一个组,即

① 将其运用于一般博弈 Γ,这种情况下,理论并没有被扩展! ——522,①

一个联盟，强制推行他们的偏好［这是(56:17)］。

另一方面，从 Γ 和实玩家的角度看，(56:D)是某种崭新的事情。它再次要求存在一个(实)玩家组［(56:20)的集合 T］，其中每一位玩家认为自己在 $\vec{\alpha}$ 中的处境优于其在 $\vec{\beta}$ 中的处境［这是(56:22)］。这个组强制推行其偏好的能力［即(56:17)］并不是必需的。相反，我们有这样一个条件，即留在这个组外边的实玩家绝不能够阻止这个组所倾向的分配。①

① 留在外边的(实)玩家，即 $-T$ 中的那些玩家，能够阻止这个组所倾向的分配，条件是他们能够独自得到 $\vec{\alpha}$ 赋予他们的总额，即

$$\sum_{i\text{属于}-T} \alpha_i < \mathrm{v}(-T)。$$

(注意，我们不得不去掉等号，因为那不能阻止分配 $\vec{\alpha}$。)这一说法的否定是

(56:21) $$\sum_{i\text{属于}-T} \alpha_i \geqq \mathrm{v}(-T)。$$

这可以与最初的组 T 强制推行其偏好的能力的表达式比较，即

(56:17) $$\sum_{i\text{属于}T} \alpha_i \leqq \mathrm{v}(T)。$$

应该注意的是，(56:17)和(56:21)中的一个并不隐含着另一个：完全有可能，组 T 在其成员受影响的范围之内能够强制推行 $\vec{\alpha}$，与此同时，组 $-T$ 在其成员受影响的范围之内能够阻止 $\vec{\alpha}$。另一方面，还有可能的是，两个组都无力强制推行或阻止任何事情。

然而，如果 Γ 是一个零和博弈，且如果我们要求(如旧理论中那样) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$，那么，(56:17)和(56:21)等价。事实上，在这种情况下，

$$\mathrm{v}(T) + \mathrm{v}(-T) = \mathrm{v}[(1,\cdots,n)] = 0,$$

所以

$$\sum_{i\text{属于}-T} \alpha_i = -\sum_{i\text{属于}T} \alpha_i,\ \mathrm{v}(-T) = -\mathrm{v}(T),$$

由此得出上述等价性。——522，②

最后，存在着一个奇特的条件：全部（实）玩家——即整个社会——在（所倾向的）制度$\vec{\alpha}$下的总体处境必须比其在（被拒绝的）制度$\vec{\beta}$下差［这是（56:23）］。

56.10.4 （56:D:b），这一奇怪的选择自然源于把
523 虚构玩家 $n+1$ 当作一个实体。如果我们不这么做，并努力在现实意义——即从实玩家的意义——上评价事情，那么，要解释（56:D:b）是十分困难的。我们充其量能够说，它似乎假设着一个有影响力的有效行动，它肯定会伤害社会整体（即全体实玩家整体）。特别地，在这种情况下，当（全部实玩家的）一个特定的组认为他们在$\vec{\alpha}$中的处境优于其在$\vec{\beta}$中的处境时，如果其余（实）玩家无法阻止这一安排，即便它对社会整体有害，这一占优关系就得到肯定。

占优（56:D:b）与普通的（56:D:a）进行比较时，尤其显著的区别有：

第一，在（56:D:a）中强制推行自己的偏好的能力是本质，而在（56:D:b）中，关键是其他人阻止它的能力。第二，在（56:D:a）中，主动的一组决不能是空集，而在（56:D:b）中，它能够是空集［见（56:19）和（56:20）］。第三，反社会观点出现在（56:D:b）中，而根本不出现在（56:D:a）中。

至此，读者会注意到，（56:D:b）相当具有非理性特征，不过毕竟不是完全陌生的。详细述说（56:D:b）是一个严格的形式化并不困难。不过，我们没有必要为此花费更多篇幅。重要的是，我们已经有了充分的理由从（56:D:b）中看出 56.5—56.6 中就一种特殊情况分析的

哪些困难产生的一般原因。显然，不像(56:D:a)那样，(56:D:b)不是研究占优概念的一个直接合理的方法。

因此，我们将试图解决我们的困难的一个简单办法是干脆拒绝(56:D:b)。

56.11　严格讨论

56.11.1　我们已经决定通过拒绝 56.10.2 的(56:D)中的(56:D:b)并保留(56:D:a)来重新定义占优。这一新的占优概念能够以两种方式表述，且两种方式都值得考虑。

第一：正如我们在 56.10.3 开头指出的那样，(56:D:a)等于是 30.1.1 的相应定义的重复。惟一的区别是，Γ 是 *524*
一个 n 人零和博弈，而现在它是一个一般 n 人博弈。

因此，我们当前的方法意味着，我们扩展到当前情况，30.1.1 中占优的定义保持不变，不考虑这一博弈不再要求是零和博弈这一事实。[1]

第二：让我们从 $\overline{\Gamma}$ 的标准来看(56:D:a)，而不是从 Γ 的标准来看(56:D:a)受到的约束。我们最初在 56.10 中的讨论给出了两种情况：(56:D:a)和(56:D:b)，它们依赖于下面的合取：从 30.1.1 意义上 $\overline{\Gamma}$ 中的占优必须以某个集合 S 为基础。现在，当 $n+1$ 不属于 S 时，有(56:D:a)；当 $n+1$ 属于 S 时，有(56:D:b)。因此，对(56:D:a)的这

---

① 我们花费这么多篇幅才得出这一简单原理。这显得有些奇怪。事实上，在我们最终接受它之前，我们还需要 56.11.2 的进一步分析。然而，尽管有了极为广泛的推广，仍需警惕不加选择地采取 30.1.1 的定义。这一段中给出的详细归纳法似乎最适合这一目的。——524.①

个约束等于要求集合 S 绝不能包含 $n+1$。

我们重复如下：我们的新占优概念意味着，就 $\overline{\Gamma}$ 而言，在 30.1.1 中占优的定义中，我们给集合 S 受到的约束条件添加一个条件：S 决不能包含一个特定的元素，即 $n+1$。

这还能够被视为有效集的概念受到的一个约束：只有在一个集合不包含 $n+1$ 时，我们视其为一个有效集。[当然，最初的条件(30.3)也是必不可少的。]

56.11.2 接着，我们研究 $\overline{\Gamma}$ 的新的解概念，即以 56.11.1中引入的新的占优概念为基础的 Γ 的解。这一分析中，我们将依靠博弈 $\overline{\Gamma}$ 和分配的形式(56:5)[而不依靠博弈 Γ 和分配的形式(56:7)]以及 56.11.1 的第二点说明中阐述的占优的定义。

我们将通过证明四个引理来得到我们的结果：

(56:E) 如果从新的意义上说 $\overline{V}$ 是 $\overline{\Gamma}$ 的一个解，那么，$\overline{V}$ 的每个

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$$

都有

$$\alpha_{n+1} = \mathrm{v}[(n+1)]。$$

证明：假设上述命题不成立，那么，必然有 $\alpha_{n+1} \geqq \mathrm{v}[(n+1)]$，从而，$\overline{V}$ 中存在一个 $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$，有 $\alpha_{n+1} > \mathrm{v}[(n+1)]$。令 $\alpha_{n+1} = \mathrm{v}[(n+1)] + \varepsilon$，$\varepsilon > 0$。定义 $\vec{\beta} = \{\beta_1, \cdots, \beta_n, \beta_{n+1}\}$，

$$\beta_i = \alpha_i + \frac{\varepsilon}{n}, \quad i = 1, \cdots, n;$$

$$\beta_{n+1} = \alpha_{n+1} - \varepsilon = \mathrm{v}[(n+1)]。$$

525 由于 $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = -\beta_{n+1} = -\mathrm{v}[(n+1)] = \mathrm{v}[(1, \cdots, n)]$，且

$\beta_i > \alpha_i$，$i = 1, \cdots, n$，所以利用集合 $S = (1, \cdots, n)$ 可证明 $\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$。[①]由于 $\vec{\alpha}$ 属于 $\overline{V}$，$\vec{\beta}$ 不可能属于它。因此，$\overline{V}$ 中存在一个 $\vec{\gamma}$，$\vec{\gamma} \succ \vec{\beta}$。现在，考虑强制推行这一占优的集合 S。因为 S 不包含 $n+1$，我们有 $S \subseteq (1, \cdots, n)$。由于 $\beta_i > \alpha_i$，$i = 1, \cdots, n$，那么，$\vec{\gamma} \succ \vec{\beta}$ 意味着 $\vec{\gamma} \succ \vec{\alpha}$。但是，$\vec{\gamma}$ 和 $\vec{\alpha}$ 都属于 $\overline{V}$。这样，我们得到一个矛盾。

(56:F)　　如果从新的意义上说 $\overline{V}$ 是 $\overline{\Gamma}$ 的一个解，那么，它在旧的意义上说也是一个解。

证明：我们必须证明 30.1.1(30:5:a)和(30:5:b)，在这里的占优关系的新含义中蕴含了其旧有的含义。现在，新意义上的占优意味着旧意义上的占优。因此，我们有关(30:5:b)的断言是直接的。需要详细研究的是(30:5:a)。

假设(30:5:a)在旧意义上不成立，即对于 $\overline{V}$ 中两个分配 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$，$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 在旧意义上成立。令 S 是强制推行这一占优的集合。根据(56:E)，$\alpha_{n+1} = \beta_{n+1} = v[(n+1)]$，因此，$n+1$ 不可能属于 S。所以，在新的意义上说，$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$，即(30:5:a)在新的意义上也不成立。证明完毕。

(56:G)　　如果在旧理论意义上说 $\overline{V}$ 是 $\overline{\Gamma}$ 的一个解，而且 $\overline{V}$ 的每个

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$$

都有 $\alpha_{n+1} = v[(n+1)]$，那么，在新理论意义

① 这一占优以及这一证明中使用的其他占优都是新的意义上的占优。——525，①

上 $\overline{V}$ 也是一个解。

证明：我们必须证明的是，这里，有旧理论意义上的占优关系的 30.1.1 的(30:5:a)和(30:5:b)意味着有新理论意义上的占优关系的相同东西。现在，新意义上的占优意味着旧理论意义上的占优，因此有关(30:5:a)的断言是直接的。需要认真研究的只是(30:5:b)。

考虑一个不属于 $\overline{V}$ 的 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}\}$。由于(30:5:b)在旧意义上成立，$\overline{V}$ 中存在一个 $\vec{\beta}=\{\beta_1,\cdots,\beta_n,\beta_{n+1}\}$，有 $\vec{\beta}\succ\vec{\alpha}$ 在旧意义上成立。令 S 是强制推行这一占优的集合。$\alpha_{n+1}\geqq v[(n+1)]$ 必然成立，而且根据假设，$\vec{\beta}$ 属于 $\overline{V}$，所以 $\beta_{n+1}=v[(n+1)]$。故，$\beta_{n+1}\leqq\alpha_{n+1}$ 且 $n+1$ 不可能属于 S，$\vec{\beta}\succ\vec{\alpha}$ 在新的意义上成立，即(30:5:b)在新的意义上成立。证明完毕。

526 (56:H) $\overline{V}$ 在新的意义上是 $\overline{\Gamma}$ 的一个解，其充分必要条件是，它属于 56.7.2 中(56:A:d)的系 Ω''。

证明：必要性是(56:E)和(56:F)的结果，充分性则来自(56:G)。

56.11.3 在解释(56:H)的结果时，我们必须牢记的是，这一分析源于对 $\overline{\Gamma}$ 的全部解组成的系施加约束的必要性，这是 Γ 的理论需要。我们在 56.7 中看到，这一约束的合理结果应该是集合 Ω' 或 Ω''（或两者之间的某个集合）。之后，我们的努力方向是在这两种可行性之间做出抉择。另外，我们在 56.10—56.11.1 中得出结论说，$\overline{\Gamma}$ 中的占优概念的修改有可能回答我们的问题。现在，(56:H)表明，占优概念的这一修改恰好导致集合 Ω''。根据这些共同的

结果，上述抉择是清楚的。我们接受 Ω''作为 Γ 的全部解组成的系。

56.12 解的新定义

56.12 我们结合上述抉择所依据的主要结果重新阐述：

(56:I)

(56:I:a)　对于一个一般 n 人博弈 Γ 来说，一个解是其零和扩展，$(n+1)$ 人博弈 $\overline{\Gamma}$ 的（30.1.1 的最初意义上的）任何一个解，对此，$\overline{\mathrm{V}}$ 中所有的

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$$

有

(56:24)　$\alpha_{n+1} = \mathrm{v}[(n+1)]$。

这些解恰好形成 56.7.2 中(56:A:d)的集合 Ω''。

(56:I:b)　对于这些分配，取形式(56:7)，$\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}\}$（即强调的是 Γ 及其玩家，而不是 $\overline{\Gamma}$），把(56:24)写成

(56:25)　$\sum_{i=1}^{n} a_i = \mathrm{v}[(1, \cdots, n)]$。

这显然是 56.8.2 中(56:10)的加强形式。

(56:I:c)　在 Γ 本身是零和博弈的特殊情况下，对于 Γ 来说，我们新的解概念与旧的解概念一致，即 30.1.1 不加修改的应用。（见 56.9.4 中第一点说明。）因此，没有必要再区别新旧

理论。（见第 518 页脚注①。）

527 (56:I:d) 对于一个 n 人博弈 Γ 来说，解也能够通过不加修改地直接把 30.1.1 的定义应用于 Γ 来得到。Γ 的分配的概念必须取形式(56:7)。（见 56.11.1 中第一点说明。）

(56:I:e) (56:I:d)成立意味着，像 56.8.2 中给出的那样，取(56:7)形式的分配的描述中没有什么必须添加的东西。然而，根据(56:I:b)，方程(56:25)将在每个解 $\overline{V}$ 中自动成立。因此，如果需要的话，我们可以添加(56:25)，即把 56.8.2 的(56:10)加强为(56:25)。[①]

(56:I:f) (56:I:a)中，$\overline{\Gamma}$ 的解受到的约束还能够表达为修改 $\overline{\Gamma}$ 的占优概念，但允许修改过的意思上的解。这一修改等于对(30.1.1 意义上的)有效集增加一个条件，即它们绝对不能包含 $n+1$。（见 56.11.1 的第二点说明。）

---

① 允许约束条件

(56:10) $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq v[(1,\cdots,n)],$$

变成

(56:25) $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = v[(1,\cdots,n)],$$

这类似于 56.9.5 的第二点说明中提到的 $E(0)$ 和 $F(0)$ 之间的等价（但更为一般）。——527,①

57. 特征函数及相关问题

57.1　特征函数：扩展型和受约束型

57.1　现在，我们有了一个理论，它适用于所有博弈，而且——它是 30.1.1 的关于零和博弈的理论扩展，与之类似——它的基础是特征函数。也就是说，真正界定该博弈的 11.2.3 的函数 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$，$k=1,\cdots,n$ 并不直接影响该理论，而只是通过特征函数 v(S) 起作用。①

然而，对于一个零和博弈和一个非零和博弈来说，特征函数 v(S) 的使用还是有区别的。对于一个 n 人零和博弈 Γ 来说，特征函数 v(S) 是就全部集合 $S\subseteq(1,\cdots,n)$ 定义的，且仅仅对这些集合有定义。（见 25.1）对于一个一般 n 人博弈 $\overline{\Gamma}$ 来说，我们却不得不构造其零和扩展博弈，$(n+1)$ 人博弈 $\overline{\Gamma}$，而且，特征函数 v(S) 实际上就像 $\overline{\Gamma}$ 的（旧的意义上的）特征函数那样建立起来。［这正是我们最近，尤其是 56.4.1、56.5.1、56.7.2、56.9.1—56.10.3、 528
56.11.2—56.12 讨论的 v(S)。］相应地，现在的 v(S) 是对集合 $S\subseteq(1,\cdots,n,n+1)$ 定义的，且仅仅对这些集合有定义。然而，如果我们愿意的话，我们可以仅仅就 $S\subseteq(1,\cdots,n)$ 考虑 v(S)。这么做时，我们将称其为**受约束**特

---

① 当然，v(S)是借助 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 来定义的。见 25.1.3 和 58.1。——527，②

征函数;最初定义域中的函数 v(S) 包括所有 $S \subseteq (1, \cdots, n, n+1)$,是扩展特征函数。

在零和博弈的特殊情况下,我们由此得出结论:旧理论的特征函数是新理论的受约束特征函数。[①]

回到一般博弈,我们看到,特征函数是我们当前理论的基础。在该理论的各种等价表述中,56.12 中的(56:I:a)使用的是扩展特征函数,而(56:I:d)使用的是受约束特征函数。

所以,我们的下一个目标必然是确定这些特征函数及其相互关系的实质。

57.2 基本性质

57.2.1 考虑一个一般 n 人博弈 Γ 及其如上定义的两个特征函数:一个是对 $I = (1, \cdots, n)$ 的全部子集 S 定义的受约束特征函数 v(S),另一个是对 $\bar{I} = (1, \cdots, n, n+1)$ 的全部子集定义的扩展特征函数 v(S)。[②]

在随后的分析中,如 56.10.2 中第二点说明中那样,我们必须区别 $-S$ 的两种可能性。对于 $S \subseteq \bar{I} = (1, \cdots, n, n+1)$,我们能够构造 $\bar{I}$ 中的 $-S$,即 $\bar{I} - S$,而对于 $S \subseteq I = (1, \cdots, n)$,我们还能够构造 I 中的 $-S$,即 $I - S$。[③] 我们仍

---

① 所有这些区别和定义不可能且不会影响严格证明过的如下事实:对于零和博弈来说,两种理论相互等价。[见 56.1.2 中的(56:I:c)。]——528,①

② 我们用相同符号记它们,因为在它们同时有定义的地方,它们总有相同取值。——528,②

③ 就同一个 S(当然了,$S \subseteq I$)建立的这两个集合显然不同。在 56.10.2 中,我们声称它们相同,但在那里,我们是就两个不同集合 S 和 T 建立它们的。——528,③

然用 $\perp S$ 记前者，用 $-S$ 记后者。

如我们在 25.3 和第 26 节就 n 人零和博弈的特征函数做的那样，我们要确定一般 n 人博弈的两个特征的基本性质。

首先考虑扩展特征函数。由于它是 $(n+1)$ 人零和博弈 $\bar{\Gamma}$ 的旧意义上的特征函数，它必定有 25.3.1 中阐述的性质(25:3:a)—(25:3:c)——只不过用 $\bar{I}=(1,\cdots,n,n+1)$ 替换那里的 $I=(1,\cdots,n)$ 而已。如此，我们得到：

(57:1:a)　$\mathrm{v}(\ominus)=0$,

(57:1:b)　$\mathrm{v}(\perp S)=-\mathrm{v}(S)$,　529

(57:1:c)　如 $S\cap T=\ominus$，则 $\mathrm{v}(S\cup T)\geqq \mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T)$。

$(S,T\subseteq \bar{I})$。

接着，我们考虑受约束特征函数。通过把我们自己限制于 I 的子集，我们从(57:1:a)—(57:1:c)得到有关它的条件。对于(57:1:a)和(57:1:c)来说，这直接可行，但是对于(57:1:b)来说，这是不可能的。[①] 以这种方式，我们得到：

(57:2:a)　$\mathrm{v}(\ominus)=0$,

(57:2:c)　如 $S\cap T=\ominus$，则 $\mathrm{v}(S\cup T)\geqq \mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T)$。

$(S,T\subseteq I)$

注意，对于 S，我们无法用一个等价的东西替换(57:1:b)。事实上，关于 $-S$，我们能够在(57:1:c)中令 $T=-S$。这给出

---

① S 和 $\perp S$ 不可能同时 $\subseteq I=(1,\cdots,n)$，因为它们中的一个必然包含 $n+1$。——529，①

(57:2:b) $\quad v(-S) \leqq v(I) - v(S)$。

即便 $v(I)=0$,(57:2:b)也只不过变成

(57:2:b*) $\quad v(-S) \leqq -v(S)$,

并不等价于 25.3.1 中的(25:3:b)

$$v(-S) = -v(S)。$$

根据其推导,(57:1:a)—(57:1:c)以及(57:2:a)、(57:2:c)只是(扩展或受约束)特征函数的必要条件。下面,我们要研究它们是否也是其充分条件。

57.2.2 如果 $\bar{\Gamma}$ 是任意一个 $(n+1)$ 人零和博弈,那么,我们能够从 26.2 的结果得出结论:满足(57:1:a)—(57:1:c)的任何 $v(S)$ 是某个适宜的 $\bar{\Gamma}$ 的(旧意义上的)特征函数,即一个适宜的一般 n 人博弈 Γ 的扩展特征函数。换句话说:这证明了条件(57:1:a)—(57:1:c)是充分必要条件——它们包含着所有可能的一般 n 人博弈 Γ 的特征函数的一个完备数学描述。

然而,$\bar{\Gamma}$ 并不是随意的。正如我们在 56.2.2 中看到的那样,(虚)玩家 $n+1$ 不影响博弈进程,即他没有个人动作;$H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n,\tau_{n+1})$ 并不直接依赖于他的变量 τ_{n+1}。而且,根据 56.2.2,显然 $\bar{\Gamma}$ 必须服从的惟一一个约束条件是:如果在一个 $(n+1)$ 人零和博弈 Γ 中,玩家 $n+1$ 不影响博弈进程,那么,我们就能够将 $\bar{\Gamma}$ 视为其余 n 个玩家 $1,\cdots,n$ 的一个一般 n 人博弈 Γ 的零和扩展。①

---

① 也就是说,在规则允许的情况下,我们能够把 $n+1$ 当作一个虚玩家来对待。我们当然知道,存在着 $\bar{\Gamma}$ 的这样一些解 $\bar{V}$,它们表明他是一个实玩家。[属于 Ω 而不属于 Ω'' 的玩家,见 56.7.2 中的(56:A:a)—(56:A:d)和 56.12 中的(56:I:a);还有,请回忆 56.3.2 和 56.3.4。]——529,②

所以，我们现在面对的问题是：(57:1:a)—(57:1:c) 530
是全部$(n+1)$人零和博弈的旧意义上的特征函数的充分必要条件，那么，我们必须如何加强它们才能等于对玩家$n+1$不影响博弈进程的全部$(n+1)$人零和博弈的（旧意义上的）特征函数做同样的事情呢？

回答这一问题等于给出全部$(n+1)$人博弈的扩展特征函数的完全数学描述。但到那时，仍然留有对有条件特征函数做这些相同事情的问题。

我们将会看到，首先向第一个问题发起攻击，一种较为优越方案产生了：第一个问题能够以多种方式借助后者来解决。然而，我们的方法将以上面的分析为主。

57.3　全部特征函数的确定

57.3.1　接下来，我们要证明的是，必要条件(57:2:a)和(57:2:c)也是充分条件：对于任意满足(57:2:a)和(57:2:c)的数字集合函数 $v(S)$，存在一个一般 n 人博弈 Γ，$v(S)$是其受约束特征函数。[①]

为了避免混淆，我们用 $v_0(S)$ 记满足(57:2:a)和(57:2:c)的给定的数字集合函数。借助于这个函数，我们将定义一个特定的一般 n 人博弈 Γ，并用 $v(S)$ 记这个 Γ 的受约束特征函数。这样，我们必须证明 $v(S)=v_0(S)$。

给定一个满足(57:2:a)和(57:2:c)的数字集合函数。我们定义一般 n 人博弈 Γ 如下：[②]

---

① 下面的构造过程与 26.1 的过程有很多共同之处。——530，①

② 读者应该将这里的细节与 26.1.2 中内容对比。——530，②

每位玩家 $k=1,\cdots,n$ 将借助一个个人动作选择 I 的一个包含 k 的子集。每个人独立地做出自己的选择。

此后，按如下方式支付：

满足

(57:3) $$S_k=S \quad k\text{ 属于 }S$$

的 S 被称为一个环(ring)。有共同元素的任何两个环等同。换句话说：(一局博弈中实际形成的)全部环的总和是 I 的两两不相交子集的系。

不属于任何环的每位玩家自己形成一个一元集，称单人集(solo set)。因此，(一局博弈中实际形成的)全部环和单人集的总和是 I 的一个分解，即 I 的两两不相交子集的一个系，其和等于 I。用 $C_1,\cdots,C_p$ 记这些集合，它们的元素个数分别记为 $n_1,\cdots,n_p$。

531 现在，考虑一个玩家 k。他恰好属于集合 $C_1,\cdots,C_p$ 之一，如 C_q。那么，玩家 k 得到数额

(57:4) $$\frac{1}{n_q}\mathrm{v}_0(C_q)。$$

这就完成了博弈 Γ 的描述。Γ 显然是一个一般 n 人博弈，而且它的零和扩展 $\overline{\Gamma}$ 也是清楚的。我们尤其强调的是，在 $\overline{\Gamma}$ 中，虚玩家 $n+1$ 得到的数额是

(57:5) $$-\sum_{q=1}^{p}\mathrm{v}_0(C_q)。$$[1]

---

① 由(57:4)，C_q 中的 n_q 个玩家总共得到的数额是 $\mathrm{v}_0(C_q)$。因此，全体玩家 $1,\cdots,n,C_1,\cdots,C_p$ 中的全体玩家总共得到的数额是 $\sum_{q=1}^{p}\mathrm{v}_0(C_q)$。故，(57:5)成立。——531，①

下面，我们要证明的是，Γ 有理想的有条件特征函数 $v_0(S)$。

57.3.2 记 Γ 的有条件特征函数为 $v(S)$。要牢记的一点是，(57:2:a)和(57:2:c)对于 $v(S)$ 成立是因为它是一个有条件的特征函数，而且按照假设它也对 $v_0(S)$ 成立。

如果 S 是一个空集，那么，由 (57:2:a)，$v(S) = v_0(S)$。这样，我们可以假设 S 不是空集。在这种情况下，属于 S 的全体玩家的一个联盟能够主导其 S_k 的选择，使 S 肯定是一个环。这只需 S 中的每个 k 都选择其 $S_k = S$。无论（$-S$ 中）其他玩家做什么，S 都将是集合（环或单人集）$C_1, \cdots, C_p$ 之一，如 C_q。$C_q = S$ 中的每个 k 得到数额(57:4)，因此，整个联盟得到数额 $v_0(S)$。所以，

(57:6) $$v(S) \geqq v_0(S)。$$

现在，考虑补集 $-S$。属于 $-S$ 的全体玩家的一个联盟能够主导其 k 的选择，使 S 是环与单人集的并集。如果 $-S$ 是空集，那么，这自动地是正确的，因为那样的话，$S = I$。如果 $-S$ 不是空集，那么，$-S$ 中的每个 k 选择他的$S_k = -S$ 就足够了。因此，$-S$ 是一个环，从而 S 是环与单人集的和。

所以，S 是集合 $C_1, \cdots, C_p$ 中的几个的和，如

$$C_{1'}, \cdots, C_{r'}$$

($1', \cdots, r'$是数 $1, \cdots, p$ 中的几个)。C_q ($q = s' = 1', \cdots, r'$) 中的每个 k 得到数额(57:4)，因此 C_q 中 n_q 个玩家总共得到数额 $v_0(C_q)$，从而 S 的全体玩家总共得到数额 $\sum_{s=1}^{r} v_0(C_{s'})$。由于 $C_{1'}, \cdots, C_{r'}$ 是两两不相交的集合且它们 532
和是 S，重复应用(57:2:c)给出 $\sum_{s=1}^{r} v_0(C_{s'}) \leqq v_0(S)$。也

就是说：无论 S 的玩家做什么，他们总共得到的数额 $\leqq$ $v_0(S)$。所以

(57:7) $$v(S)\leqq v_0(S)。$$

(57:6)和(57:7)合起来给出我们想要的结果

(57:8) $$v(S)=v_0(S)。$$

57.3.3 现在，让我们考虑扩展特征函数。这里，我们知道，条件(57:1:a)—(57:1:c)是必要的。我们将要证明的是，它们也是充分的：即对于满足(57:1:a)—(57:1:c)的任意数字集合函数 $v(S)$，存在一个一般 n 人博弈 Γ，这个 $v(S)$ 是其扩展特征函数。

为避免混淆，我们再次用 $v_0(S)$ 记满足(57:1:a)—(57:1:c)的给定的数字集合函数。用 $v(S)$ 记我们即将使用的一般 n 人博弈 Γ 的扩展特征函数。

设数字集合函数 $v_0(S)$ 满足(57:1:a)—(57:1:c)。暂时地，仅就集合 $S\subseteq I=(1,\cdots,n)$ 分析它，那么，它满足(57:2:a)和(57:2:c)。因此，57.3.1 和 57.3.2 的构造能够被用于 $v_0(S)$。这样，我们得到一个一般 n 人博弈 Γ，它的有条件特征函数总有 $v(S)=v_0(S)$①，而且，对于 $S\subseteq I$，其扩展特征函数有 $v(S)=v_0(S)$。也就是说，如果我们返回到这些 S 的自然取值范围②，那么，我们有：

(57:9) $$v(S)=v_0(S),\quad n+1 \text{ 不属于 } S。$$

令 $n+1$ 属于 S，那么，它不属于 $\perp S$。因此(57:9)给出 $v(\perp S)=v_0(\perp S)$。对于 $v(S)$ 来说，(57:1:a)—(57:1:c)

① 这里的"总有"仅限于 $S\subseteq I$。——532，①

② 在这种情况下，它由 $S\subseteq \bar{I}$ 组成。——532，②

成立，因为它是一个扩展特征函数，而且按照假设，它们对 $v_0(S)$ 也成立。所以，(57:1:b) 给出 $v(\perp S) = -v(S)$，$v_0(\perp S) = -v_0(S)$。这些方程结合起来给出

(57:10)　　$v(S) = v_0(S)$，　如 $n+1$ 属于 S。

(57:9) 和 (57:10) 合起来给出

(57:11)　　$v(S) = v_0(S)$

无条件地成立。

57.3.4 总之：我们已经得到了所有可能的一般 n 人博弈 Γ 的有条件特征函数和扩展特征函数 $v(S)$ 的完备数学描述。前者由 (57:2:a) 和 (57:2:c) 描述，后者由 (57:1:a)—(57:1:c) 描述。

因此，我们遵循 26.2 的类似过程，并分别称满足这些 533
条件的函数为有条件特征函数和扩展特征函数，即便是在仅仅谈到这些函数本身而不提及任何博弈的时候，我们也这样称呼它们。

57.4 可去除玩家集

57.4.1 我们得到的有关扩展特征函数的结果能够被表述为：任何 $(n+1)$ 人零和博弈（旧意义上）的每个特征函数也是某个适宜的一般 n 人博弈的扩展特征函数。① 回想 57.2.2 的讨论，这意味着：任何 $(n+1)$ 人零和博弈的每个特征函数也是一个适宜的 $(n+1)$ 人的特征函数，其中玩家 $n+1$ 丝毫不影响博弈进程。

---

① 事实上，条件 (57:1:a)—(57:1:c) 等于 25.3.1 的 (25:3:a)—(25:3:c) 中用 $\bar{I} = (1, \cdots, n, n+1)$ 替换 $I = (1, \cdots, n)$。——533，①

让我们把这一陈述中的 $n+1$ 换成 n，得到有关 n 人零和博弈和玩家 n 的作用的等价说法。为了便于阐述这一结果，我们定义：

(57:A) 给定一个 n 人零和博弈 Γ，一个集合 $S\subseteq I=(1,\cdots,n)$。我们称 S 对于 Γ 来说是可去除的(removable)，如果有可能找到另一个 n 人零和博弈 Γ'，它与 Γ 有相同的特征函数，但在 Γ' 中，属于 S 的玩家都不影响博弈进程。

利用这个定义，我们的断言变成了：集合 $S=(n)$ 是可去除的。给定任一玩家 $k=1,\cdots,n$，我们能够对换玩家 k 与 n 的角色，因此集合 $S(k)$ 也是可去除的。这样，我们看到：

(57:B) 每个博弈 Γ 中的每个一元集 S 都是可去除的。

现在，应该注意到的是，根据我们的理论，在一个博弈中，联盟的全部策略和补偿仅仅依赖于其特征函数。因此，从这个角度看，(57:A)中具有相同特征函数的两个博弈 Γ 和 Γ' 是完全相似的。

所以，(57:B)能够有如下解释：在一个 n 人零和博弈中，任何一位玩家的作用——仅就联盟的策略可能性和补偿而言——都能够在他被剥夺了对博弈进程的影响力的安排中得到完全复制。这里，他的“作用”取其最宽泛的意思：包括他与其他玩家的关系，他对他们之间相互关系的影响。

换句话说：我们在 56.3.2—56.3.4 中描述了一个机

制，借助这一机制，一位不直接影响博弈进程的玩家却能够影响联盟和补偿谈判。我们在（57:B）中表明的是，这一机制完全足以描述任何博弈中任一玩家能够在这方 534
面有的影响。这一说法必须被绝对一字不漏地采纳：我们的结果保证所有可想像的细节和微妙之处都将被复制。

57.4.2 根据（57:B），每位玩家 $k=1,\cdots,n$ 都是单个地可去除的，即一元集 $S=(k)$ 是可去除的，但这并不意味着，所有这些玩家是同时可去除的——即集合

$$S=I=(1,\cdots,n)$$

是可去除的。事实上，我们有：

（57:C）　　集合 $S=I$ 是可去除的，当且仅当博弈 Γ 是非本质博弈。

证明：玩家 $k=1,\cdots,n$ 都不影响博弈 Γ' 的进程。这意味着所有的函数 $H'_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 都独立于它们的变量 $\tau_1,\cdots,\tau_n$，即它们都是常数

（57:12）　　$H'_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)=\alpha_k$。

由此，

（57:13）　　$\mathrm{v}(S)=\sum_{k\text{属于}S}\alpha_k,\quad S\subseteq I$。

相反，如果（57:13）是必要的，它能够由（57:12）来保证。

所以（57:13）是一个博弈 Γ 的特征函数，对于 Γ，存在着这样一个 Γ'，而（57:13）恰好是非本质博弈的定义。

对于 $n=1,2$，每个博弈 Γ 都是非本质博弈，从而集合

$S=I$——且伴随它的每个集合——是可去除的。[1] 对于 $n \geq 3$，存在着本质博弈，从而 $S=I$ 一般来说不可去除。

因此，出现了这样一个问题：

(57:D) 对于一个本质博弈 Γ 来说，哪些是可去除集？

(57:B)和(57:C)中包含着部分答案：一元集是可去除的，n 元集($S=I$)是不可去除的。界线在什么地方？

57.4.3 当全部($n-1$)元集都是可去除集时，达到了上界。我们称这样一个博弈为极端博弈。这个性质所具有的含义值得想像：在这样一个博弈中，策略局面等价于仅有一位玩家对博弈进程有影响力，其他玩家的作用充
535 其量是影响他的决策。当然，影响的办法是向其提供补偿；这样做的动机是引诱他做出对提供补偿的玩家有利的决策。

现在，我们能够证明：

(57:E) $n=3$ 时：本质三人零和博弈是极端博弈。

(57:F) $n=4$ 时：极端博弈和非极端本质四人零和博弈都存在。

更具体说：

(57:E*) 对于本质三人零和博弈来说，全部二元

---

① 有关二人零和博弈的主要结果，根据这一结果，每个这类博弈对于每位玩家来说有一个确定的值(如 v、-v，见 17.8. 和 17.9 的讨论)，这意味着：它说明，该博弈等价于两位玩家得到固定的支付 v、-v。而且，这是他们中的任何一位都没有任何影响的一种安排。

另一方面，在每个本质博弈中，存在着联盟和补偿谈判的相互作用，而且这排除了全部玩家能够同时可去除。——534，①

集都是可去除的。

(57:F*)　　对于一个本质四人零和博弈来说，全部三元集都可去除，或者只有一个集合不可去除。[①②]

这些命题的证明都不十分困难，不过，我们不打算在这里给出它们。

(57:B)、(57:C)、(57:E)和(57:F)表明，有关可去除集和极端博弈的一个一般理论不会十分简单。我们将在随后发表的著作中加以系统讨论。

57.5 策略等价：零和博弈与常数和博弈

57.5.1 我们已经详细论述了一般 n 人博弈 Γ 的零和扩展 $\overline{\Gamma}$ 的有用性，因此，从此以后，我们将讨论一般 n 人博弈，不再提及这个概念。所以，除非特别指明的相反情况，我们将只利用博弈 Γ 本身及其有约束特征函数。出于这一理由，"有约束"这个限定词将被丢掉，我们将简单地说 Γ 的特征函数。这是与我们在前面就 n 人零和博弈使用的术语一致的，因为现在看来一个特征函数的新旧使用是一致的。(见紧接 57.1 末尾的说明。)

考虑到这些安排，解的概念的定义必须是 56.12 的(56:I:d)中描述的定义。分配最好定义得像(56:I:b)中

---

① 每个二元集都是两个三元集的一个子集(请牢记 $n=4$)，而且，根据上面的分析，这些集合中至少有一个是可去除的。因此，每个二元集都是可去除的。——535，①

② 34.2.2 的立方体 Q 的与这些可能情况对应的部分都能够明确确定下来。——535，②

和(56:I:e)的最后一部分中描述的那样。我们有必要明确重述后一个定义：

一个分配是一个向量

(57:14) $$\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}\},$$

其分量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 满足的条件是

(57:15) $$\alpha_i \geqq \mathrm{v}[(i)], \quad i = 1, \cdots, n,$$

536 (57:16) $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \mathrm{v}(I)。$$ ①

下面，我们把策略等价的概念扩展到当前新结构之中。我们要做的事情完全类似于 42.2 和 42.3.1 中做的事情，即类似于 27.1：

给定一个有函数 $H_k(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ 的一般 n 人博弈 Γ 和一组常数 $\alpha_1^0, \cdots, \alpha_n^0$，我们定义一个有函数 $H'_k(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ 的新博弈 Γ'：

(57:17) $$H'_k(\tau_1, \cdots, \tau_n) \equiv H_k(\tau_1, \cdots, \tau_n) + \alpha_k^0。$$

完全像从前那样，我们由此得出结论说，这两个博弈的特征函数 $\mathrm{v}(S)$ 和 $\mathrm{v}'(S)$ 之间有如下联系：

(57:18) $$\mathrm{v}'(S) = \mathrm{v}(S) + \sum_{i \text{属于} S} \alpha_k^0。$$

我们称这样两个博弈及其特征函数**策略等价**。

由于我们不再受限于零和博弈约束，恰如 42.2.2 中(42:B)中那样，常数 $\alpha_1^0, \cdots, \alpha_n^0$ 不受任何限制。

---

① 正如我们在那里指出的那样，我们本可以等价地使用 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqq \mathrm{v}(I)$。事实上，这正是这一条件的最初形式。然而，我们倾向于使用(57:16)。——536，①

我们注意到，正如上面提到的两个例子中的情况那样，这一策略等价引出 Γ 的分配与 Γ' 的分配的同构。具体来说，31.3.3 和 42.4.2 的分析和结论能够不加改变地照搬到当前这种情况，以致没有必要将其重新阐述。

57.5.2 （所有的一般 n 人博弈的）特征函数的取值范围由条件（57:2:a）、（57:2:c）描述。我们将其重述如下：

（57:2:a）　　$v(\ominus)=0$，

（57:2:c）　　$v(S\cup T)\leqq v(S)+v(T)$，　$S\cap T=\ominus$。

在这些特征函数中，零和博弈的特征函数，常数和博弈的特征函数形成两个特殊的类。前者由 25.3.1 的（25:3:a）—（25:3:c）描述。（见 26.2。）也就是说，我们必须在（57:2:a）、（57:2:c）［它们与（25:3:a）、（25:3:c）一致］上添加另一个条件

（57:19）　　$v(-S)=-v(S)$。

后者由 42.3.2. 中（42:6:a）—（42:6:c）描述。也就是说，我们必须在（57:2:a）、（57:2:c）［它们与（42:6:a）、 537
（42:6:c）一致］上添加一个条件

（57:20）　　$v(S)+v(-S)=v(I)$。

由于零和博弈是常数和博弈的特殊情况，（57:20）必定是（57:19）的一个结果，总假设有（57:2:a）和（57:2:c）。事情的确是这样。事实上，我们能够证明得更多，即：

（57:G）（57:19）等价于（57:20）与 $v(I)=0$ 的结合。

证明：[①]假设 $v(I)=0$，(57:19)和(57:20)显然是相同的命题。因此，我们只需证明(57:19)意味着 $v(I)=0$。事实上，(57:2:a)和(57:19)给出 $v(I)=v(-\ominus)=-v(\ominus)=0$。

注意，(57:20)断言，当 $S\cup T=I$ 时，(57:2:c)中等式成立。[②] 因此，常数和博弈的 $v(S)$ 是由这样一个性质描述的，即两个不同的联盟 S 和 T 包含全部玩家，那么，它们的合并没有额外好处。

对于零和博弈的 $v(S)$ 来说，条件 $v(I)=0$ 是必须添加的。

最后，我们强调，额外条件(57:19)或(57:20)并不意味着，具有这一特征函数的博弈必然是一个零和博弈或常数和博弈。它们仅仅意味着，这样一个特征函数必定属于某个零和博弈或常数和博弈。能够发生这样的事情，一个博弈本身不是零和(或常数和)博弈的博弈有这样一个特征函数，即一个零和(或常数和)博弈的特征函数。在这种情况下，从联盟的策略和补偿的角度看，它表现得类似于一个零和(或常数和)博弈。

57.5.3 下面，我们要解决一个问题，该问题在我们的讨论中多次占据突出地位。56.3.2—56.4.3 的分析提到过这样一个事实：虚构玩家——尽管他不实际出现——并非一个哑玩家。也就是说，从扩展特征

① 从本质上说，这一证明已经在 42.3.2 中给出。——537，①

② 事实上，$S\cup T=I$ 和(57:2:c)的通常假设 $S\cap T=\ominus$ 意味着，$T=-S$。——537，②

函数和零和扩展 $\overline{\Gamma}$ 的分解理论的意义上说，它不是一个哑玩家。[①] 在 56.9.3 开头，这个问题再次出现，那里，我们注意到，对于零和博弈 $\overline{\Gamma}$ 来说，他是一个哑玩家。

现在，我们要回答的问题是：对于哪些一般博弈 Γ 来说，虚玩家是一个哑玩家？[②] 我们证明：

(57:H)　虚玩家是一个哑玩家的充分必要条件是，Γ 与一个常数和博弈有相同特征函数，即 (57:20) 得到满足。

证明：正如我们在 43.4.2 末尾看到的那样，一个玩家是一个哑玩家，当且仅当他（作为一个一元集）是该博弈的一个成分。我们必须将此运用于零和博弈 $\overline{\Gamma}$ 中的虚构玩家 $n+1$。$(n+1)$ 是一个成分。这显然意味着， 538

(57:21)　$\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}[(n+1)]=\mathrm{v}[S\cup(n+1)]$，

其中，$S\subseteq(1,\cdots,n)$。这样，我们有

$$\mathrm{v}[(n+1)]=-\mathrm{v}(I),$$

$$\mathrm{v}[S\cup(n+1)]=-\mathrm{v}[\perp S\cup(n+1)]=-\mathrm{v}(-S)。$$

从而，(57:21) 变成

$$\mathrm{v}(S)-\mathrm{v}(I)=-\mathrm{v}(-S),$$

即

(57:22)　$\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(-S)=\mathrm{v}(I)$。

而且，这正是条件 (57:20)。

---

① 我们不得不通过明确地把解从 Ω 限制为 Ω'' 来排除他。——537，③

② 56.9.4 中第一点说明表明，对于这些博弈，Ω 和 Ω'' 相同，即对 $\overline{\Gamma}$ 的解的约束是不必要的。——537，④

58. 特征函数的解释

58.1 定义分析

58.1 我们已经得到了一般 n 人博弈理论的一个表述，而且我们发现，特征函数的概念像其在 n 人零和博弈理论中一样基本。因此，我们应该再次研究这一概念的含义，将其数学定义变成明确的形式并添加一些解释说明。

考虑一个一般 n 人博弈 Γ，它由 11.2.3 意义上的函数 $H_k(T_1,\cdots,T_n)\,(k=1,\cdots,n)$ 描述。对于一个集合 $S\subseteq I=(1,\cdots,n)$，通过构造 $(n+1)$ 零和博弈 $\bar{\Gamma}$——Γ 的零和扩展——的 $\mathrm{v}(S)$ 来得到 Γ 的特征函数的取值 $\mathrm{v}(S)$。① 因此，我们能够借助 25.1.3 的定义公式来表述它：

$$(58{:}1)\qquad \mathrm{v}(S)=\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}K(\vec{\xi},\vec{\eta})=\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}K(\vec{\xi},\vec{\eta})$$

那里，我们有：

539 $\vec{\xi}$ 是一个向量，有分量 ξ_{τ^S}，

$$\xi_{\tau^S}\geqq 0,\qquad \sum_{\tau^S}\xi_{\tau^S}=1;$$

$\vec{\eta}$ 是一个向量，有分量 $\eta_{\tau^{-S}}$

$$\eta_{\tau^{-S}}\geqq 0,\ \sum_{\tau^{-S}}\eta_{\tau^{-S}}=1;$$

---

① 我们把自己限于 $S\subseteq I=(1,\cdots,n)$，即有约束的特征函数。使用所有的 $S\subseteq\bar{I}=(1,\cdots,n+1)$，即扩展特征函数，与我们当前的立场矛盾。（见 57.5.1 的开头。）——538，①

τ^S 是变量 τ_k(k 属于 S)的综合;τ^{-S}是变量 τ_k(k 属于 $-S$)的综合;①最后,

(58:2) $$K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \sum_{\tau^S,\tau^{-S}} \overline{H}(\tau^S,\tau^{-S})\xi_{\tau^S}\eta_{\tau^{-S}},$$

其中,

(58:3) $$\overline{H}(\tau^S,\tau^{-S}) = \sum_{k\text{属于}S} H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)\text{。}$$②

58.2 获益欲与损人欲

58.2.1 显然,如果联盟 S 采用混合策略 $\vec{\xi}$ 而其敌对联盟 $-S$ ③采用混合策略 $\vec{\eta}$,$K(\vec{\xi},\vec{\eta})$是对于联盟 S 来说一局博弈 $\overline{\Gamma}$ 的期望值。因此,(58:1)定义 v(S),即对于联盟 S 来说,在如下假设下该博弈的一局的值:联盟 S 想要最

---

① $-S$ 代表 $I-S$。由于我们正在研究的是 $\overline{\Gamma}$,我们应该已经构造了 $\perp S$,它是 $\bar{I}-S$。(见 57.2.1. 开头)然而,这是无所谓的,因为不存在变量 τ_{n+1}。(见 56.2.2 末尾。)——539,①

② 我们仅仅适用最初的 H_k,$k=1,\cdots,n$,即 56.2.2. 中(56:2)的 H_{n+1}

(58:4) $$H_{n+1}(\tau_1,\cdots,\tau_n) \equiv -\sum_{k=1}^{n} H_k(\tau_1,\tau_n)$$

并不出现在这里,其原因自然是 $S\subseteq I=(1,\cdots,n)$。

必须牢记的一点是公式(58:3)是 25.1.3. 中(25:2)的第一个公式。(25:2)的第二个公式给出

(58:5) $$\overline{H}(\tau^S,\tau^{-S}) = \sum_{k\text{属于}\perp S} H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)\text{。}$$

(注意,这里我们必须对于那里的 $-S$ 使用 $\perp S=\bar{I}-S$,因为我们正在对付的是 $\overline{\Gamma}$。也可参见脚注①。)由于 $n+1$ 不属于 S,它肯定属于 $\perp S$,所以(58:5)中的 $\sum_{k\text{属于}\perp S}$ 并不包含(58:4)的 H_{n+1}。然而,(58:4)必须保证(58:3)的右端与(58:5)的恒等。——539,②

③ 脚注①的结果再次适用。——539,③

大化期望值 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$，而其敌对联盟 $-S$ 要将其最小化，而且，它们选择各自的（混合）策略 $\vec{\xi},\vec{\eta}$。

在 $(n+1)$ 人博弈 $\bar{\Gamma}$ 中①，这一原理肯定也是正确的，
540 不过，我们实际上正在面对的是 n 人博弈 Γ——$\bar{\Gamma}$ 只不过是一个"工作假说"！而且，在 Γ 中，联盟 $-S$ 要伤害其敌对联盟 S 的欲望并不明显。事实上，联盟 $-S$ 的自然愿望并非减少联盟 S 的期望值 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$，而是增加它自己的期望值 $K'(\vec{\xi},\vec{\eta})$。如果 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 的减少等价于 $K'(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 的增加，那么，这两个原则等同。当 Γ 是一个零和博弈时，情况当然是这样②，但对于一般博弈 Γ 来说，事情未必如此。

---

① 即如果我们视 $-S=I-S$ 好像真的代表着 $\perp S=\bar{I}-S$。——539，④

② 这是因为，当 Γ 是零和博弈时，

(58:6) $$K(\vec{\xi},\vec{\eta})+K'(\vec{\xi},\vec{\eta})\equiv 0$$

按照常识，这是显然的。一个正式的证明是：

显然，

(58:7) $$K'(\vec{\xi},\vec{\eta})\equiv\sum_{\tau^S,\tau^{-S}}\bar{H}'(\tau^S,\tau^{-S})\xi_{\tau^S}\eta_{\tau^{-S}},$$

其中，

(58:8) $$\bar{H}'(\tau^S,\tau^{-S})\equiv\sum_{k\text{属于}-S}H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)。$$

[注意，这不是出现在(58:5)中的 $\sum_{k\text{属于}\perp S}H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$]。现在，(58:2)与(58:7)的比较告诉我们，(58:6)等价于

(58:9) $$\bar{H}(\tau^S,\tau^{-S})+\bar{H}'(\tau^S,\tau^{-S})\equiv 0,$$

而且(58:3)和(58:5)意味着，(58:9)等于是

$$\sum_{k=1}^{n}H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)\equiv 0,$$

即 Γ 是零和博弈的条件。——540，①

也就是说，在一个一般博弈 Γ 中，一组玩家的优势未必是其他玩家的劣势。在这样一个博弈之中，也许存在着对两个组同时有利的动作——或策略变动。换句话说，也许存在着使社会各部门的生产力同时增加的机会。

58.2.2 事实上，这决不仅仅是一种可能性——其所指情形构成经济和社会理论必须应对的主题之一。因此，产生了如下问题：难道我们的方法完全无视这一方面吗？难道因为我们极为强调社会关系的敌对性方面而丢弃其合作的一面吗？

我们认为，事情并非如此。要给出一个完备例子的确困难，原因在于一种理论成立与否最终由其应用中的成功来证明，而且我们的讨论中尚且没有这样的应用。因此，我们将提出支持我们的方法的要点，然后谈一谈能够提供 541
一些确凿证据的应用。

58.3 讨论

58.3.1 这里，如下分析尤其值得注意：

第一：在一个一般（即非零和）博弈中，给对手制造损失也许不会给自己带来直接的好处，但这是给对手施加压力的办法。他也许受这样一种威胁的引导而支付一定的补偿、按照施压者的意愿调整他的策略等。因此，把这类可能的策略考虑进去不是没有道理的；而且，如上面分析的那样，在特征函数的构造中，我们的方法也许是做到这一点的恰当方法。然而，我们必须承认，这并非我们的方法的一个正当理由——它只不过为应用中的成功这一真正的理由提供了背景。

第二:在这个方向上,另一个理由是:我们已经看到,在我们的理论中,所有的解都对应着全体玩家的总体实现最大集体收益。① 当这个最大值得到实现时,一组玩家的进一步获益必定大于或等于其他玩家的损失。的确,过度补偿是能够存在的:即一组玩家可以通过给其他玩家制造较大损失而获得某一收益。然而,我们假设了全体玩家都有完全信息、完全的相互威胁、他们中间的反威胁和补偿。②因此,我们可以假设,这样的可能性仅仅作为威胁而有效,相应的行动将总是通过谈判和补偿来消除。这并不意味着,这些威胁是永远不会"摊牌"的"虚张声势"。由于对于所有的玩家来说,信息是完全的,永远不会存在怀疑。但是,当一个行动受到这样一个行动威胁时,其中一方遭受的损失大于另一方得到的收益,那么,通过对双方有利的方式进行补偿来避免采取行动的可能就存在。③ 而且,如果事情是这样的话,那么,一方所得再次等于另一方所失。

如果这一观点被一般地接受,那么,我们的困难就消失了。

58.3.2 第三:有人会说,前面两点说明过于粗糙,它并不表明具有我们建议使用的严格形式的理论的合理性。

---

① 见 56.7.1,尤其是第 513 页脚注③。——541,①

② 在零和博弈理论中,我们关于联盟和补偿的总体态度就以此为基础。——541,②

③ 这里,我们并不打算确定补偿的数额——即妥协的本质。这是我们已经有的严格理论的任务。每一实例中,它都将是主题。(见第 61—63 节中的各种解释。)这里,我们只想证明,给全体玩家整体带来损失的行动能够通过上述机制来避免。——541,③

事情的确如此，不过，如 56.2.2—57.1 中给出的那样，十分详细地说明了的我们关于那一理论的动机满足后一个要求。如果读者从前面两点说明的角度重新思考那些章节，那么，你将明白，理想的详细证明正是这些章节的主题。事实上，一个可能的反对意见是，为什么要避开显而易见的捷径呢？① 542

第四：尽管如此，读者也许还会觉得，我们过于强调威胁、补偿等的作用，而且这也许是我们的方法的一个片面性，有可能有损应用中的结果。对此最好的回答，如我们一再指出的那样，是研究那些应用。

因此，我们将分析一些应用。这些应用对应着人们熟悉的经济问题。关于它们的研究将表明，我们的理论带来的结果，在一定程度上，令人满意地符合有关这些问题的常识。只要如下两个条件得到满足，事情就会如此：第一，我们研究的结构要足够简单，以致允许纯粹文字分析，不使用任何数学工具；第二，一些无法从我们的理论中分离出去但又常常在普通的文字方法——联盟和补偿——中排除出去的因素并不起基本作用。我们将会发现，这种情况存在于 61.2.2—61.4 的应用中。事实上，那个例子提供了我们的方法的关键证据。

超过这一点，在第一个条件仍然得到满足、但第二个条件没有得到满足的地方，我们将恰恰在这个方向上发现差异，且其程度足以证明它。在 61.5.2、61.6.3 和 62.6

---

① 一个可能的途径是像 58.1 中那样定义特征函数，然后提出关于零和博弈的理论的推广，即提出 56.12 中的(56:I:d)。——542.①

的应用中，这一点尤为清楚。

最后，即便第一个条件也没有得到满足，由于该问题不再是基本问题，我们逐步到达了理论方法必然取代普通纯文字方法而成为主要方法的境地。①

59. 一般分析

59.1 方案讨论

59.1.1 下面，我们继续我们的一般 n 人博弈理论的应用。我们最好从 n 较小时的全部一般 n 人博弈的系统讨论开始。当 $n \leqq 3$ 时，像零和博弈那样，我们能够做到绝对完备性。关于较大的 n，即 $n \geqq 4$ 的情况讨论的难度不
543 会低于零和博弈的难度，我们只能解决一些特殊情况。

这一次，在分析 $n \geqq 4$ 的博弈时，我们希望大幅度减少篇幅。与我们关于零和博弈的讨论相比，我们这里的讨论能够简短得多。那里，详细讨论是必要的，为的是竖立我们自己对我们的方法、概念及其背后的方法论原理的信心。到了现在这个阶段，理论的一般结构已经得到证实，我们需要的只是竖立对这一章中做出的进一步推广的信心。为此，不那么广泛的应用分析就应该足够了。

---

① 从借助简单情况中可靠的常识性结果来证实理论，到借助复杂情况中的理论来推翻非理论方法，这种重点逐步转移在科学理论的建立中相当典型。——542，②

另外,我们有可能把 $n\leqq 3$ 的一般博弈与一些典型经济问题(如双边垄断、双头垄断等)联系起来。这允许从前面指出的意义上判断我们的理论恰当与否。

$n\geqq 4$ 的博弈的较为详细的研究放在以后将要出版的著述之中。

59.1.2　像第 31 节那样,我们的新理论的系统应用最好从一个一般讨论开始。不过,倒没有必要给出同样详细的讨论。我们必须分析的是,在什么程度上,那里得到的结果能够照搬到当前情况,或需要做什么样的修改。

我们不必像 31.3 那样重新讨论策略等价的作用,因为这个题目已经在 57.5.1 中得到了令人满意的处理。另一方面,我们将拣起源于第 31 节之外的一些问题:简化型、对于特征函数成立的不等式、非本质性和本质性(见 27.1—27.5);再有:绝对值 $|\Gamma|_1$ 和 $|\Gamma|_2$(见 45.3),最后是有关第 9 章的分解理论的一些说明。

59.2　简化型和不等式

59.2.1　如 57.5.1 中介绍的那样,策略等价的概念能够像 27.1 中描述的那样被用于定义特征函数的简化型。

给定一个特征函数 $\mathrm{v}(S)$,其一般策略等价变换由 57.5.1中的(57:18)给出,即

(59:1)　$$\mathrm{v}'(S)=\mathrm{v}(S)+\sum_{k\text{属于}S}\alpha_k^0。$$

这正好是 27.1.1 中的(27:2),不过,现在的 $\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0$ 完全不受约束,而那里它们要服从条件(27:1):$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^0=0$。

因此，现在的$\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0$是$n$个独立参数，而原来它们只代
544 表着$n-1$个独立的参数（见27.1.3）。①

然而，不要错误地认为，这样导致正规化的可能性较27.1.4会受到更多的限制。事实上，我们在那里希望得到一个特殊的$\mathrm{v}'(S)$——记为$\bar{\mathrm{v}}$，它满足$n-1$个条件(27:3)：

(59:2) $\bar{\mathrm{v}}[(1)]=\bar{\mathrm{v}}[(2)]=\cdots=\bar{\mathrm{v}}[(n)]$。

然而，那时考虑的特征函数属于零和博弈。因此，我们自动有

(59:3) $\bar{\mathrm{v}}[(1,\cdots,n)]=0$。

将此作为正规化的一个要求，我们就有了n个条件：(59:2)和(59:3)。这样，我们得到

(59:4) $$\mathrm{v}(I)+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^0=0,$$

(59:5) $$\mathrm{v}[(1)]+\alpha_1^0=\mathrm{v}[(2)]+\alpha_2^0=\cdots=\mathrm{v}[(n)]+\alpha_n^0。$$

(59:4)表达的是(59:3)；(59:5)表达的是(59:2)。这些方程对应着(27:1*)和(27:2*)，而且容易验证，它们的解恰好是$\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0$的一个系：

(59:6) $$\alpha_k^0=-\mathrm{v}[(k)]+\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{v}[(k)]-\mathrm{v}(I)\right\}。②$$

---

① 在这方面，我们目前的观点类似于42.2.2中我们对常数和博弈采取的观点。——544，①

② 证明：用β记(59:5)中n项的共同值，那么，(59:5)等于是$\alpha_k^0=\mathrm{v}[(k)]+\beta$，从而(59:4)变成$\mathrm{v}(I)-\sum_{k=1}^{n}\mathrm{v}[(k)]+n\beta=0$，即

$$\beta=\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{v}[(k)]-\mathrm{v}(I)\right\}。——544，②$$

这样，我们能够说：

(59:A)　　我们称一个特征函数 $\bar{v}$ 是简化型的特征函数，当且仅当它满足(59:2)和(59:3)。①那么，每个特征函数 v(S) 恰好策略等价于一个简化型特征函数 $\bar{v}$。$\bar{v}$ 由公式(59:1)和(59:6)给定，我们将其称为 v(S) 的简化型。

59.2.2　对 n 个参数 $\alpha_1^0, \cdots, \alpha_n^0$ 的另一个可能要求是要求 v′(S)——记为 $\bar{v}$——满足如下 n 个条件：

(59:7)　　$\bar{v}[(1)] = \bar{v}[(2)] = \cdots = \bar{v}[(n)] = 0$。

这意味着 545

(59:8)　　$v[(1)] + \alpha_1^0 = v[(2)] + \alpha_2^0 = \cdots = v[(n)] + \alpha_n^0 = 0$

即

(59:9)　　$\alpha_k^0 = -v[(k)]$。

这样，我们能够说：

(59:B)　　我们称一个特征函数 v(S) 是零简化型特征函数，当且仅当它满足(59:7)。这样，每个特征函数 v(S) 都恰好策略等价于一个零简化型特征函数 $\bar{v}(S)$。$\bar{v}$ 由公式(59:1)和(59:9)给定，我们将其称为 v(S) 的零简化型。

59.2.3　让我们考虑简化型特征函数 $\bar{v}(S)$。我们用 $-\gamma$ 记(59:2)中 n 项的连结值，即

(59:10)　　$-\gamma = \bar{v}[(1)] = \bar{v}[(2)] = \cdots = \bar{v}[(n)]$。

因此 $-\gamma = v[(k)] + \alpha_k^0$，从而(59:6)给出

① 这恰好是 27.1.4 的定义。——544，③

(59:11) $\gamma=\frac{1}{n}\{\mathrm{v}(I)-\sum_{k=1}^{n}\mathrm{v}[(k)]\}$。

如果我们使用同一 v(S) 的零简化型特征函数 $\bar{\mathrm{v}}(S)$，那么，我们有 $\bar{\mathrm{v}}=\mathrm{v}(I)+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^0$，因此，根据(59:9)，$\bar{\mathrm{v}}=\mathrm{v}(I)-\sum_{k=1}^{n}\mathrm{v}[(k)]$，即使用(59:11)：

(59:12) $n\gamma=\bar{\mathrm{v}}(I)$。

回到简化型特征函数 $\bar{\mathrm{v}}(S)$，我们看到，27.2 的有些等式和全部不等式仍然成立。

首先，(59:10)能够被陈述为：

(59:13) 对于每个一元集 S，$\bar{\mathrm{v}}(S)=-\gamma$。

这与(27:5*)一致，而(27:5**)并不成立，因为我们在 57.2.1 中看到，25.3.1 中(25:3:b)的等价条件现在不见了，而且这个条件是从(27:5*)推出(27:5**)所必需的。

由(59:13)，57.2.1 中的(57:2:c)重复应用于集合(1)，…，(n)，给出 $-n\gamma\leqq 0$，即

(59:14) $\gamma\geqq 0$。

这与 27.2 中的(27:6)一致。

接下来，考虑 I 的随意一个子集 S。令 p 是其元素个

546 数：$S=(k_1,\cdots,k_p)$。根据(59:13)，57.2.1 中的(57:2:c)重复应用于集合(k_1)，…，(k_p)，给出

$$\bar{\mathrm{v}}(S)\geqq -p\gamma。$$

将这一结果应用于有 $n-p$ 个元素的 $-S$。根据 57.2.1 中的(57:2:b)和(59:3)，我们有

$$\overline{\mathrm{v}}(-S) \leqq -\overline{\mathrm{v}}(S)^{①},$$

因此，前面的不等式现在变成了

$$\overline{\mathrm{v}}(S) \leqq (n-p)\gamma。$$

结合这两个不等式给出：

(59:15)　　对于每个 p 元集 S，$-p\gamma \leqq \overline{\mathrm{v}}(S) \leqq (n-p)\gamma$。

这与 27.2 中的(27:7)一致。

(59:13)和 $\overline{\mathrm{v}}(\ominus)=0$[即 57.2.1 中的(57:2:a)]还能够被表述为：

(59:16)　　对于 $p=0,1$，我们有(59:15)中第一个关系中的等号。

这与 27.2 中的(27:7*)一致。$\overline{\mathrm{v}}=0$[即(59:3)]还能够被表述为：

(59:17)　　对于 $p=n$，我们有(59:15)的第二个关系中的等号。

这与(27:7**)一致，只是 $p=n-1$ 丢失了，理由同(27:5**)的等价条件的丢失[见(59:13)后面的说明]。

59.3　各种各样的题目

59.3.1　这些不等式现在能够以 27.3.1 中的同样方式来处理。

基于(59:14)，有两种情况：

第一种情况：$\gamma=0$。在这种情况下，(59:15)给出，

---

① 注意，在我们现在的应用中，这个不等式取代了 25.3.1 中这个丢失的等式(25:3:b)，它曾经在 27.2 中被用到。——546，①

对于所有 S,$\bar{v}(S)=0$。这正是 27.3.1 中讨论的非本质博弈,有那里列举的所有属性。考虑到(59:A),非本质博弈恰好是等价于有 $\bar{v}\equiv 0$ 的那些博弈,完全没有内容的博弈。

第二种情况:$\gamma>0$。通过改变单位,我们能够使 $\gamma=1$,有 27.3.2 中指出的结果。而且,正如那里的情况,我们避免直接这么做。出于与那里相同的理由,联盟策略是这样一个博弈的关键。我们称这种情况下的博弈为本质博弈。

27.4 中有关非本质博弈和本质博弈的准则(27:B)、(27:C)和(27:D)再次成立:在(27:B)中,$\sum_{k=1}^{n} v[(k)]$ 必须换成

547

$$\sum_{k=1}^{n} v[(k)]-v(I),$$

而(27:C)和(27:D)则完全不受影响。事实上,容易验证,那里给出的证明可以照搬到这里,它们的基础是 59.2.1。

我们把 27.5——有关 $\gamma=1$ 的本质博弈——的分析在当前情况的应用留给读者。

59.3.2 现在,我们能够给出与第 31 节相应的分析了。

31.1.1—31.1.3 有关占优、肯定必要集和肯定不必要集概念结构的说明能够不加改变地再照搬到这里。我们也能够像 31.1.4 那样引入凸集和平集的概念。除了 31.1.4 中的(31:E:b)、31.1.5 中的(31:G)和 $p=n-1$ 时的(31:H)之外,31.1.4—31.1.5 的结论也不受影响。这些只不过是 25.3.1 的(25:3:b)中使用的那些结论(见

57.2.1)。

最后,31.1.5 末尾的说明必须被修改。由于上述讨论,值 $p=n-1$ 只不过像包括在(31:8)中的那些结果一样值得怀疑。也就是说,使 S 的必要性令人怀疑的 p 限于 $p\neq 0,1,n$,即满足区间

(59:18)　　　　$2\leqq p\leqq n-1$。

因此,这个区间在 $n\geqq 3$ 时开始起作用,并不像 31.1.5 所说那样,$n\geqq 4$ 时才起作用。①

接下来,我们分析 31.2 的结果。读者不难验证,(31:I)、(31:J)和(31:K)不受影响。在(31:L)中,借助于 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 的结构能够同样得到说明。第一个结果,$\vec{\beta}\succ\vec{\alpha}$ 不再成立,因为它用到 31.1.5 中的(31:H)部分,而(31:H)不再成立。第二个结果,$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$ 不成立,不受影响。(31:L)的这一弱化去除了(31:M)。(31:N)保持成立,因为它只用到(31:L)中未受影响的部分。(31:O)和(31:P)不受影响。

59.3.3　最后,让我们考虑第 9 章的某些概念。

我们在 45.1 中定义了 $|\Gamma|_1$,在 45.2 中定义了 $|\Gamma|_2$,并在 45.3 中讨论了它们的性质。

这两个定义——即 45.1 和 45.2 的相关讨论——能够照搬过来。然而,45.3 中存在着基本变化:在(45:F)中,只有该证明的第二部分成立,第一部分并不成立,因为 548
后者用到了 25.3.1 中的(25:3:b)(见 57.2.1)。

① 这与一般 n 人博弈与 $(n+1)$ 人零和博弈之间的关系一致,在 56.2—56.12 中,这一关系至关重要。——547,①

尤其是,我们仍然有

(59:19) $|\Gamma|_2 \leqq \frac{n-2}{2}|\Gamma|_1$,

从而,我们能够用$|\Gamma|_1$来估计$|\Gamma|_2$。但是,我们没有

(59:20) $|\Gamma|_1 \leqq (n-1)|\Gamma|_2$ ①,

我们也无法用$|\Gamma|_2$来估计$|\Gamma|_1$。事实上,我们将在60.2.1中看到,对于有些博弈来说,

(59:21) $|\Gamma|_1 > 0, \quad |\Gamma|_2 = 0$。

所以,45.3.3—45.3.4的说明变得没有意义了。对于45.3.1来说也是这样,即其结果(45:E)每当涉及$|\Gamma|_2$时不再成立。对于$|\Gamma|_1$来说,它是成立的,但这不过是定义的简单重复。考虑到这一点以及上面的(59:19)和(59:21),我们看到,(45:E)必须以如下方式弱化:

(59:C) 如果Γ是非本质博弈,那么,$|\Gamma|_1=0, |\Gamma|_2=0$。
如果Γ是本质博弈,那么,$|\Gamma|_1>0, |\Gamma|_2 \geqq 0$。

作为第9章的主题,合成和分解理论就其本质来说能够被扩展到我们当前的结构之中。上面讨论的$|\Gamma|_1$和$|\Gamma|_2$的不同表现需要稍加改变,不过,这些很容易应用。当然了,集合$E(e_0)$和$F(e_0)$中的剩余和解的理论必须被扩展到当前结构中——这同样没有太大困难。

这个题目的详细分析会超出我们在59.1.1中设定的范围。另外,在分析零和博弈时,这些结果与第4章和第9章中得出的结果解释不会有实质性不同。

---

① (59:20)和(59:19)表达的分别是(45:F)的两个部分。——548,①

60. $n \leqq 3$ 一般博弈的解

60.1　$n=1$ 的情况

60.1　下面，像 59.1.1 中声称的那样，我们讨论 $n \leqq 3$ 时的一般 n 人博弈。

首先考虑 $n=1$ 的情况。这种情况已经在 12.2 中考虑过，而且就实际目的而言已经得到解决。尤其是，我们在 12.2.1 中指出过，在这种情况（且只有在这种情况）下，我们有一个纯粹最大值问题。不过，我们希望验证一下我们的一般理论在这种特殊情况下是否给出常识结果。[1] 因此，我们以完全的数学严格性应用我们的理论。

$n=1$ 时，一个一般博弈 Γ 必然是非本质博弈：考虑到其简化型的特征函数，这一点是显然的，因为这样的话，59.2.3 中的(59:16)和(59:17)（在 $p=1=n$ 时）给出 $-\gamma=0$。我们也可以不加简化地应用 27.4 的准则(27:B)、(27:C)和(27:D)中的任何一个（见 59.3.1）。 549
例如，(27:C)显然得到满足，有 $\alpha_1 = \mathrm{v}[(1)]$。注意，这是 $\mathrm{v}(I)$，即根据 56.9.1 中的(56:13)（根据 12.2.1 的符号），这是 $\mathrm{Max}_\tau H(\tau)$。我们将其重述如下：

(60:1)　　$\alpha_1 = \mathrm{v}[(1)] = \mathrm{v}(I) = \mathrm{Max}_\tau H(\tau)$。

由于 Γ 是非本质博弈，我们能够应用 31.2.3 中的(31:O)

① 这使我们回到 58.3.2 中的第四点说明。——548，②

或(31:P)(见 59.3.2)。这给出:

(60:A) Γ 恰好有一个解,一元集$(\vec{\alpha})$,其中,

$\vec{\alpha}=\{\{\alpha_1\}\}$,

其中的 α_1 是(60:1)中的 α_1。

这显然是 12.2.1 的“常识”结果。

60.2 $n=2$ 的情况

60.2.1 下面,考虑 $n=2$ 的情况。一个主要事实是,$n=2$ 的一个一般博弈未必是非本质博弈——从而不同于 $n=2$ 时的零和博弈。

事实是:其简化型的特征函数 $\bar{v}(S)$ 完全由 59.2.3 中的(59:16)和(59:17)决定。它是

(60:2) 当 S 有 $\begin{cases}0\\1\text{个元素时,}\\2\end{cases}$ $\bar{v}(S)=\begin{cases}0\\-\gamma\text{。}\\0\end{cases}$

现在,你可以直接验证,(60:2)的一个 $\bar{v}(S)$ 满足 57.2.1 的条件(57:2:a)和(57:2:c),即当且仅当 $\gamma\geqq0$,它是一个适宜的 Γ 的特征函数(见 57.3.4)。这恰好是 59.2.3 中的条件(59:14)。这样,我们看到:59.2.3 的(59:14)的 $\gamma\geqq0$ 恰好是(60:2)的可能情况。

因此,如我们曾经断言的那样,$\gamma>0$,即本质性,是可能情况之一。在 Γ 是本质博弈的情况下,我们可以将其正规化,使 $\gamma=1$,从而完全确定(60:2)。所以,仅仅存在着一种类型的本质一般二人博弈。

注意,有可能 $|\Gamma|_1=2\gamma>0$,(对于 $n=2$)却总存在着 $|\Gamma|_2=0$。我们只需就简化型(60:2)证明之。

事实是：回想 45.2.1 和 45.2.3 的定义，我们看到，当 $\alpha_1, \alpha_2 \geqq -\gamma, \alpha_1 + \alpha_2 \geqq 0$ 时，$\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \alpha_2\}\}$ 是独立的，且相应的 $e = \alpha_1 + \alpha_2$ 最小值是 0。① 因此，$|\Gamma|_2 = 0$。

总之：当 $n = 2$ 时，一个零和博弈必定是非本质博弈，一个一般博弈未必是本质博弈。相应地，前者必定有 $|\Gamma|_1 = 0$；后者可以有 $|\Gamma|_1 > 0$。但两者都有 $|\Gamma|_2 = 0$。 550

我们请读者参照前面的讨论（尤其是 45.3.4）解释这个结果。

60.2.2　对于一个 $n = 2$ 的一般博弈来说，解的确定是容易的。

根据 31.1.5 中（31:H）的成立的部分（见 59.3.2 中的相关结果），有 0、1 或 n 个元素的集合 $S \subseteq I$ 都是肯定不必要集——由于 $n = 2$，这穷举了全部子集。因此，我们可以确定 Γ 的解，好像占优永远不会成立。所以，一个解简单地由这样一个性质定义：任何分配都在解之内。也就是说，恰好存在着一个解：所有分配构成的集合。

在这种情况下，一般分配被给定为 $\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \alpha_2\}\}$，满足 57.5.1 中的条件（57:15）和（57:16），这些条件现在变成了

（60:3）　　$\alpha_1 \geqq \mathrm{v}[(1)], \quad \alpha_2 \geqq \mathrm{v}[(2)]$，

（60:4）　　$\alpha_1 + \alpha_2 = \mathrm{v}[(1,2)] = \mathrm{v}(I)$。

我们把上述结果重述如下：

（60:B）　　Γ 恰好有一个解，即全部分配的集合。这些分配是

① 假设如此，如 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$。——549，①

$$\vec{\alpha}=\{\{\alpha_1,\alpha_2\}\}$$

其中，α_1,α_2 满足(60:3)和(60:4)

注意，(60:3)和(60:4)确定惟一一对数 α_1,α_2（即 $\vec{\alpha}$），其充分必要条件是

(60:5) $\quad v[(1)]+v[(2)]=v[(1,2)]$。

按照 27.4 的准则，这恰好表达了 Γ 是非本质博弈。恰如应该的那样，这个结果与 31.2.3 中的(31:P)一致（见 59.3.2）。

如若不然，

(60:6) $\quad v[(1)]+v[(2)]<v[(1,2)]$，

且存在着无穷多的 α_1,α_2，——即 $\vec{\alpha}$。这是 Γ 是本质博弈的情况。

这些结果的解释将在 61.2—61.4 中给出。

60.3 $n=3$ 的情况

60.3.1 最后，考虑 $n=3$。这些博弈包括 $|\Gamma|_1>0$，$|\Gamma|_2>0$ 的本质三人零和博弈（见 45.3.3）。这样，我们看到：

$n=3$ 时，一个零和博弈以及一个一般博弈可以是本质博弈，且 $|\Gamma|_1>0$ 和 $|\Gamma|_2>0$ 是可能的。

551 Γ 是非本质博弈的情况被包括在 31.2.3 中的(31:O)或(31:P)之中（见 59.3.2）。因此，我们假设 Γ 是本质博弈。

利用 Γ 的 $\gamma=1$ 简化型，那么，我们能够借助 59.2.3 中的(59:16)和(59:17)描述其特征函数 $\bar{v}(S)$：

(60:7)　　当 S 有 $\begin{cases}0\\1\\3\end{cases}$ 个元素时，$\bar{v}(S)=\begin{cases}0\\-1,\\0\end{cases}$

且 S 有 2 个元素时，

(60:8)　　$\bar{v}[(2,3)]=a_1,\bar{v}[(1,3)]=a_2,\bar{v}[(1,2)]=a_3$。

我们可以直接验证，当且仅当，

(60:9)　　$-2\leqq a_1,a_2,a_3\leqq 1$，

(60:7)和(60:8)的 $\bar{v}$ 满足 57.2.1 的条件(57:2:a)和(57:2:c)，即它们是某个适宜的 Γ 的特征函数。

注意，这个 Γ 能够被选成一个零和博弈，即 25.3.1 的(25:3:b)成立的充分必要条件是

(60:10)　　$a_1=a_2=a_3=1$。

换句话说：域(60:9)代表着所有的一般博弈，而其上界(60:10)代表着零和博弈。

60.3.2　现在，让我们确定这个(本质)一般三人博弈。

在这种情况下，一般的分配被给定为 $\vec{\alpha}=\{\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}\}$，满足 57.5.1 中的条件(57:15)、(57:16)，这些条件现在成了：

(60:11)　　$\alpha_1\geqq -1,\alpha_2\geqq -1,\alpha_3\geqq -1$，

(60:12)　　$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$。

这些条件恰好是 32.1.1 的关于 α_1、α_2、α_3 的那些条件[见那里的(32:2)和(32:3)]，即本质三人零和博弈中使用的那些条件。除了因子 $1+\frac{e_0}{3}$ 之外，这些条件也与 47.2.2 的关于 α^1、α^2、α^3 的那些条件相同[见那里的(47:2*)和(47:3*)]，即与有剩余的本质三人零和博弈的理论中使

用的那些条件相同。所以，我们能够利用 32.1.2 中的图形描述，尤其是图 52。我们得到，$\vec{\alpha}$ 的取值范围是 32.1.2 的图 53 中的基本三角形。它还类似于 47.2.2 中图 70 中的基本三角形。

我们在这一图形表示中表达占优关系。关于一个占
552 优关系 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 的 30.1.1 的集合 S，我们能够有如下说法：根据 31.1.5 中(31:H)的成立的部分（见 59.3.2 中的有关结果），有 0、1 或 n 个元素的集合 $S \subseteq I$ 都是肯定不必要集，但由于 $n=3$，这把我们的分析限制于那些二元集 S。

令 $S=(i,j)$①，那么，占优意味着，

$\alpha_i+\alpha_j \leqq \bar{v}[(i,j)]=a_k$　且 $\alpha_i>\beta_i$，　$\alpha_j>\beta_j$。

由(60:12)，第一个条件可以被写成 $\alpha_k \geqq -a_k$。

我们将其重述为：占优

$$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$$

意味着，

$$\begin{aligned}&\alpha_1>\beta_1,\quad \alpha_2>\beta_2,\quad \text{且}\quad \alpha_3 \geqq -a_3;\\ (60:13)\quad &\text{或}\ \alpha_1>\beta_1,\quad \alpha_3>\beta_3,\quad \text{且}\quad \alpha_2 \geqq -a_2;\\ &\text{或}\ \alpha_2>\beta_2,\quad \alpha_3>\beta_3,\quad \text{且}\quad \alpha_1 \geqq -a_1。②\end{aligned}$$

---

① i,j,k 是 1,2,3 的一个排列。——552,①

② 这相当类似于 47.2.3 中的(47:5)，只不过我们在那里用 $-\frac{2e_0}{3}$ 取得了 a_1,a_2,a_3。还存在着刻度的变化，其变化变数是(60:11)、(60:12)之后提到的 $1+\frac{e_0}{3}$。

其与 32.1.3 中(32:4)的关系如同 47.2.3 中(47:5)，见第 406 页脚注②。——552,②

现在,(60:13)所描述的情形能够被添加到基本三角形的图形中。其与第 47 节的相似性胜过其与第 32 节的相似性。这一运算对应着从图 70 到图 71、图 72 或到图 84、图 85 的过渡。事实上,其与(在相继情况下描述类似运算的)图 71、图 84 和图 87 的不同仅仅在于:
组成该图形描述的六条线

(60:14)

$$\begin{cases}\alpha^1=-\left(1+\frac{e_0}{3}\right),\alpha^2=-\left(1+\frac{e_0}{3}\right),\alpha^3=-\left(1+\frac{e_0}{3}\right),\\ \alpha^1=-\left(1-\frac{2e_0}{3}\right),\alpha^2=-\left(1-\frac{2e_0}{3}\right),\alpha^3=-\left(1-\frac{2e_0}{3}\right),\end{cases}$$

被分别换成了另外六条线:

(60:15) $$\begin{cases}\alpha_1=-1,\quad \alpha_2=-1,\quad \alpha_3=-1,\\ \alpha_1=-a_1,\quad \alpha_2=-a_2,\quad \alpha_3=-a_3。\end{cases}$$

因此,出现在(由前面的三条线形成的)基本三角形里面的(由后面的三条线形成的)第二个三角形未必被放置得与前者对称,即未必如前面提到的三个图中那样。

60.3.3 为了方便,我们区别两种情况,这两种情况 553
对应着,(60:15)的后三条线的

(60:16) $\alpha_1 \geqq -a_1,\quad \alpha_2 \geqq -a_2,\quad \alpha_3 \geqq -a_3,$

侧面[(60:13)的三个占优关系成立的地方]是否相交于一个共同的区域。由(60:12),前者意味着,

(60:17:a) $a_1+a_2+a_3>0,$

而后者意味着,

(60:17:b) $a_1+a_2+a_3\leqq 0。$

我们分别将其称为情况(a)和情况(b)。

情况(a):除了里面的那个三角形未必被放置得与基本三角形对称之外,我们有图71、图72中的状况。将这一点牢记心头,那么,如47.4—47.5中给出的那样,情况(IV)的讨论就能够照搬到这里了。因此,解是图82、图83中的那些解。

我们要注意的是,如果 a_i 之一等于1,那么,里面的三角形和基本三角形的相应的一侧重合[见(60:15)],而且相应的区域消失。①

情况(b):我们基本上有图84、图85的条件——图87、图88的变形,像情况(a)那样,相同的附带条件是非对称性。

我们用图92重新画出图84的摆放方式,用实线代表基本三角形,用虚线代表里面的三角形。这一摆放方式有几个变形,原因在于里面的三角形能够以不同方式刺破基本三角形。② 图92—95画出了这些不同情况。③④

① 因此,在零和博弈情况下,$a_1=a_2=a_3=1$,根据第32节的结果,这些曲线一条也不出现。——553,①

② 由(60:9),$-2\leqq a_i\leqq 1$。正如读者不难验证的那样,这意味着,里面的三角形的每一侧都必须从基本三角形和与其相对着的顶点之间通过。我们的图92—95穷尽了满足这一约束的所有可能情况。——553,②

③ 在一个零和博弈中,即 $a_1=a_2=a_3$ 的情况下,惟一可能发生的事情是那些能够是对称的情况:图92和图95。在这些情况中,图92对应着图84,而图95对应着图87。——553,③

④ 图92—95按照②、③、④相继消失而相互不同。另外,区域①和⑤、⑥、⑦中一个或多个可能退化为一个线性区间甚或一个点。有时候,要区别上述"消失"和"退化"并不那么容易。允许区别对应于图92—95的四种情况且不遇到这一困难的一个法则是:图92-95分别对应着的情况是,"内部"三角形面对着基本三角形的0,1,2,3条边。(面对一个顶点算作面对着它所属的两条边。)——553,④

如果我们把这些情况牢记在心，那么，如 47.6 给出
的那样，情况（V）的讨论就能够照搬过来了。[①] 因此，解 554
是图 86 中图示的那些解，但要考虑到不对称性和①—⑦
中某些区域的消失和退化（见图 92—95 和第 553 页脚
注④）。

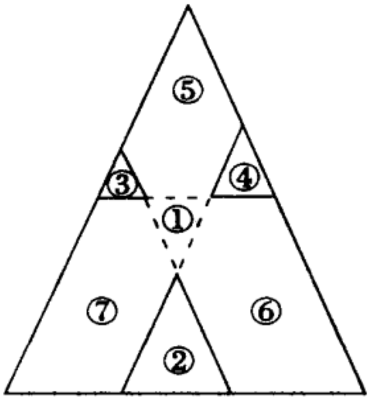

图 92

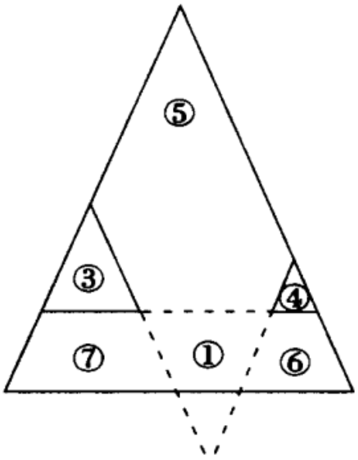

图 93

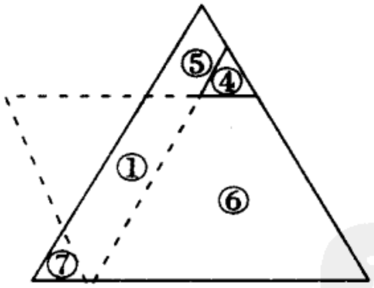

图 94

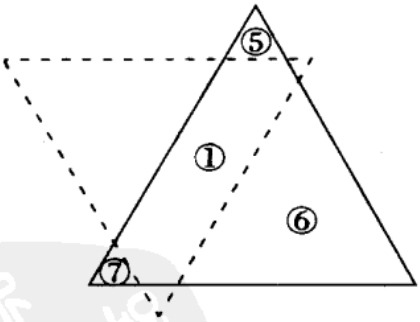

图 95

① 47.7 中情况（V）的讨论也可以被看作极为简单情况下这里的讨论的重复。——554，①

60.4 与零和博弈的比较

60.4.1 我们已经以一种严格的方式确定了 $n=3$ 时一般 n 人博弈的全部解，但我们尚未分析这些结果的含义。这正是我们接下来的任务。

让我们首先给出一些正式的说明。我们已经看到，一个一般博弈能够成为本质博弈的最小的 n 是 $n=2$，而对于零和博弈来说，相应的数是 $n=3$。我们还看到，$n=2$ 时，恰好存在一个本质的一般博弈，而 $n=3$ 时也恰好存在着一个本质零和博弈。再有，$n=3$ 的本质一般博弈（在上述同样假设下）形成一个有三个参数的多面体，而对于零和博弈来说，相应的数字是 $n=4$。所有这些暗示着一般 n 人博弈与 $(n+1)$ 人零和博弈之间的一个相似之处。当然
555 了，其理由是我们知道的：一般 n 人博弈的 $(n+1)$ 人零和扩展博弈是 $(n+1)$ 人零和博弈，而且，我们看到，每个 $(n+1)$ 人零和博弈也总能够以这种方式得到。①

60.4.2 然而，必须牢记的一点是，虽然 $(n+1)$ 人零和博弈被按照这种方式穷尽了，它们的解却没有被穷尽——一个一般 n 人博弈的解仅仅是其零和扩展的解的一个子集[见 56.12 中的(56:I:a)]。

因此，我们说确定了所有一般三人博弈的全部解仅仅意味着，我们知道四人零和博弈的某些解，而不是其全部解。事实上，第 7 章的篇幅大而不完全的讨论表明，确定

① 确切地说：它策略等价于一个以如此方式得到的博弈。（见 57.4.1 开头。）——555，①

所有四人零和博弈的全部解是相当艰巨的任务。然而，我们关于一般三人博弈的结果在很大程度上隐含着：对于每个四人零和博弈来说，解是存在的。（第 7 章的试探性分析并没有揭示这一点。）

61. $n=1,2$ 时结果的经济学解释

61.1　$n=1$ 的情况

61.1　让我们进入当前这一分析的主题：$n=1,2,3$ 时结果的解释。

首先考虑 $n=1$ 的情况：这种情况下的重要事情都已经在 60.1 中提到过了。如其必然，我们的结果是简单最大值原理的重复，这是这种情况的特征，而且，只有在这种情况下描述的才是“鲁滨孙”或共产主义完全计划经济。

61.2　$n=2$ 的情况：二人市场

61.2.1　接着，考虑 $n=2$ 的情况：对于这种情况，我们在 60.2.2 中得到的结果能够有如下文字解释：

恰好存在着一个解。它由这样一些分配组成，其中每位玩家得到的数额至少是他自己能够确保的数额，而且两个人合起来恰好得到它们合起来确保的数额。

这里，“一位玩家能够自己得到的数额”必须被理解为，无论其对手做什么，他都能够得到的数额，哪怕其对手

有宁愿遭受损失而不想取得收益的欲望。[①]

在研究解时，我们发现了兑现 58.3.2 中的第四点说明中许下的诺言的机会：我们必须弄明，假设对手有遭受损失而不想有收益的欲望，"一位玩家能够为保证自己得
556 到的数额"的定义是否仍然给出常识结果呢？[②] 为了以这种方式将我们的理论的这一结果与"常识"进行比较，我们要把一般二人博弈描述得较符合普通的直觉。通过分析能够存在于两个人之间的一些基本关系，不难发现这样一种形式。

61.2.2 所以，我们分析的市场中有两个人：一个买者和一个卖者。我们只分析一次交易，而且这等价于一般二人博弈。显然，它还等价于双边垄断这一经典经济问题的最简单形式。

两位参与者是 1 和 2：1 是卖者，2 是买者。我们要考虑的交易是参与者 1 出售一单位特定商品 A 给参与者 2。用 u 记对于参与者 1 来说占有 A 的价值，用 v 记对于参与

---

① 见 58.2.1 末尾和 58.3 中的详细讨论。玩家 k 能够确保自己得到的数额自然是 $v[(k)]$。——555，②

② 读者将会明白，我们并没有把这种欲望归属于对手。只不过，我们的理论能够被描述得好像他有这种欲望。重要的不是这一可能描述，而是该理论的结果。

事实上，对手的这一"恶意"行为仅仅决定解的某些特征，而非全部特征：它给出每位玩家必须个别地得到的数额的下限，但两人合起来得到的数额只能由完全合作的对立假设来描述。（见上。）

这恰恰是一般事实的一个特殊情况，即只有完整严格的理论才是所有情况下的可靠指导原理，而其部分的文字讨论只具有局部的适用性，且有可能相互冲突。

58.3 的讨论能够更好地说明这一点。——556，①

者 2 来说占有 A 的价值。也就是说，u 代表对于卖者来说 A 的最大备择用途，而 v 代表着它对于买者来说的价值。

为了使一次交易有意义，对于买者来说 A 的价值必须超过对于卖者来说 A 的价值，即我们必须有

(61:1)　$$u < v。$$

为了方便，当没有交易发生时，我们假设买者的状态——即他的初始金融状况——是他的效用是零。[①]

下面，让我们把这描述为一个博弈。在这么做时，我们最好使 A 在我们的描述中彻底消失，取而代之的是与其转移或其备择用途有关的价值。这样，我们可以将这一博弈的规则描述如下：

参与者 1 向参与者 2 提出一个"价格"p，参与者 2 可以"接受"或"向下压"。在第一种情况下，参与者 1、2 分别得到的数额是 p 和 $v-p$。在第二种情况下，他们得到的数额分别是 u 和 0。[②]

这一博弈的常识结果是，价格 p 将落在这两位参与者的备择价值决定的界限之间，即 557

(61:2)　$$u \leqq p \leqq v。$$

p 将具体落在(61:2)的两个极限之间的什么地方取决于没有进入这一描述的那些因素。事实上，该博弈的规则只给出一次叫价，它必须被接受或拒绝——这显然是该交易的最

① 我们有目的地避免把一次出售描述为一次易货交换。由于我们一再重复过的理由，我们的理论迫使我们使用一个不受限制的可转移的数字效用函数，我们也可以用货币来描述之。

我们仅仅在第 12 章中偏离这一观点。——556，②

② 我们请读者用我们最初的组合数学定义来描述这一博弈。——556，③

终叫价。此前也许有着谈判、讨价还价、签约和重新签约等。对此，我们只字未提。因此，这个极为简化的模型的一个令人满意的理论应该使(61:2)的整个区间是 p 的取值范围。

61.3 二人市场及其特征函数的讨论

61.3.1 这一博弈是我们正在考虑的经济结构的一个模型。在进一步深入讨论之前，我们对这一博弈的描述做两点说明。

第一：使用更精巧的模型允许(有限的)更多次叫价是可能的。

现实市场中，所有参与者的相继叫价受到精细程度更大或更小的规则的约束，要理解它们的特征，在我们的模型中允许多次叫价是很基本的。另外，我们在第 19 节中详细研究了扑克游戏。这一博弈的基础是全部参与者的叫牌的相互影响，而且，我们在那里看到，这些叫牌的序列和排列对于博弈的结构和理论来说是至关重要的。(尤其见 19.1—19.3 的描述部分，19.11—19.14 中讨论的不同变形以及 19.16 的总结。)

然而，较为仔细的研究表明，在我们当前这一结构中，这些细节变得无足轻重了。现在的情形完全不同于扑克游戏，因为扑克游戏是一个零和博弈且一位玩家的失必然是另一位玩家的得。[①] 尤其是，就像我们将在 61.3.3 中就

---

① 如第 19 节分析的那样，这直接适用于作为一个二人博弈的扑克游戏。如果有多于两个以上的人参与，那么，我们借助联盟来处理，如同两人情形。——557，①

简单情况所分析的那样,读者可以用同一方式讨论更为复杂(但只有两个参与者!)的市场。你将发现与我们在61.3.3中得到的(61:5)和(61:6)相同的特征函数。事实上,那里给出的演绎适用于任何(二人!)市场:进行了这一比较的读者将会看到,这些证明①中真正重要的事情是,卖者(或买者)可以绝对地坚持上述价格,不管他可以得到的还价以及要求相继叫价的次数是多少。②

这些详尽阐述基本上给出了我们的简单模型的相同结果。因此,我们不予考虑。

61.3.2 第二:另一方面,我们的模型还能够被进一 *558*
步简化。事实上,我们的理论中一直假设的(合作的)玩家之间的补偿机制足以取代竞价。也就是说,没有必要把价格要约、接受或压价作为博弈规则的一部分。补偿机制足以覆盖这些,包括最初的谈判、讨价还价、签约和重新签约。

这样一个简单博弈能够被描述如下:玩家 1、2 都可以选择交换或不交换。如果其中之一选择不交换,那么,1、2 得到的数额分别为 u 和 0。如果两者都选择交换,那么,他们得到的数额分别是 u' 和 u''——u'、u'' 是和为 v 的两个随意的数量。③

---

① 最明显的一个是 61.3.3 中(61:5)的证明。——557,②

② 回到前面关于扑克的说明:读者可以验证,一个相应的简单措施如何在那里不起作用,原因在于博弈规则使任何过分的叫牌或简单的叫牌方式受到惩罚。

当然了,你能够在指导一个市场的规则中引入类似的条款。事实上,存在着属于这种类型的特定传统交易方式,如期权。不过,在我们对问题的初步研究中考虑这样的规则似乎不足取。——557,③

③ (61.2.2 方案和上述方案)两种方案的特征函数将在 61.3.3 中确定,而且它们将被证明是等同的。——558,①

换句话说：博弈规则可以提供一个随意的"价格"$p=u'$（那么，$v-p=u''$），这个价格是两位玩家所不能影响的——他们将通过补偿机制实现其他价格。

因此，61.2.2 中选定的方案既不是最简单的，也不是最完全的。我们现在利用它是因为它最适合得出此种情况的基本特征而无需细节。

61.3.3 用分配的术语来说，61.2.2 的"常识"结果等于是：恰好存在着一个解，而且它是如下分配的集合：

$$\vec{\alpha}=\{\{\alpha_1,\alpha_2\}\},$$

其中，

(61:3) $$\alpha_1\geqq u,\quad \alpha_2\geqq 0,$$

(61:4) $$\alpha_1+\alpha_2=v。$$

将这些东西与我们在 60.2.2 中的理论的应用进行比较，我们看到，当(61:3)、(61:4)与那里的(60:3)、(60:4)一致时，两者并不矛盾。这意味着，我们必定有

(61:5) $$\mathrm{v}[(1)]=u,\quad \mathrm{v}[(2)]=0,$$

(61:6) $$\mathrm{v}[(1,2)]=v。$$

容易验证，(61:5)、(61:6)的确成立。为了完美，我
559 们就 61.2.2 和 61.3.1、61.3.2 的两种方案证明这一点，第一个在正文中处理，对于第二个来说需要的变形放在中括号内。

(61:5)的证明：通过提出价格 $p=u$（通过选择不交换）玩家 1 能够确保得到 u。通过压低每一价格（通过选择不交换）玩家 2 能够确保玩家 1 得到 u。因此，$\mathrm{v}[(1)]=u$。

用 $p=v$ 替换 $p=u$（两位玩家的共同行为）以相同方式产生 $\mathrm{v}[(2)]=0$。

(61:6)的证明:两位玩家合起来得到 u 或 v,后者来自 $p+(v-p)$(来自 $u'+u''$)。根据(61:1),v 更好。所以,

$$\mathrm{v}[(1,2)]=v。$$

61.4　第 58 节中观点的正当理由

61.4　正如我们在 61.3.3 中看到的那样,特征函数 v(S)与 u、0、v 的一致也许显得无足轻重。然而,重要的一点是,为获得它,我们使用了我们的特征函数定义,对此,58.3 和 61.2 的批评是站得住脚的。也就是说,在该理论的特定部分,它依赖于每一位玩家认为其对手宁愿遭受损失而不要收益。

重要的是,要认识到,这一依赖性是真正有意义的,即这一假设的修改将会改变结果,因为这一结果在当时看来是正确的。我们最好借助 61.2.2 的方案来做到这一点。

事实上,假设玩家 2 在特定条件下倾向于取得收益而不是要给玩家 1 造成损失;假设这些条件存在,比如当玩家 1 提出一个大于 u 但小于 v 的价格 p_0 时。在这种情况下,如果玩家 2 接受,他得到 $v-p_0$;如果他压价,他得到 0。因此,接受玩家 1 提出的价格使他获益。另一方面,如果玩家 2 接受了,玩家 1 得到 p_0;如果玩家 2 拒绝,他得到 u。因此,玩家 2 通过压价给玩家 1 造成损失。所以,我们现在关于玩家 2 的企图的假设意味着,他将接受。

因此,在这些条件下,玩家 1 能够指望获得数额 p_0。这与我们前面的结果冲突,根据前面的结果,整个价格区间(61:2)都应该是允许的,而且我们在 61.2.2 中看到,后者是自然的结果。

总之：我们在61.2—61.4中给出的一般二人博弈的讨论已经证明，在决定特征函数是否应该构造得像我们的理论中使用的那样时，一般二人博弈至关重要。这一结构非常简单，足以让我们对结果给出一个“常识”性的预测，而且构造特征函数过程中的任何变化都会显著改变理论结果。这样，我们借助该理论的应用得到了58.3中第四点说明意义上的一个确凿证据。

61.5 可分割的物品：“边际对”

560 **61.5.1** 61.2—61.4涉及的是十分基本的情况，不过，对于我们为自己设定的“举证”任务来说，这是足够的。另外，通过解释一个本质一般二人博弈，所有的事情都得到了解释，因为它们全部策略等价于一个（能够被正规化为$\gamma=1$的）简化型。

至此，一切都十分顺利。但是，仍有待证明的是，我们的理论是否能够同等地对待并非无关紧要的经济结构呢？为此，我们将首先扩展关于二人市场的描述。我们将会看到，这并不给出新的东西。然后，我们将转向一般三人博弈。那里，我们将发现更为基本的解释的新证据和机会。

61.5.2 让我们回到61.2.2中描述的情况：在一个市场中，存在着一个卖者1和一个买者2。现在，我们允许交易任意s个单位的商品：$A_1,\cdots,A_s$（它们是不可分的，而且能够相互替代）。[1] 用u_t记玩家1拥有这些中的t个

① 我们也可以允许连续可分性，不过这不会造成实质上的不同。——560，①

单位($t=0,1,\cdots,s$)的价值，用 v_t 记玩家 2 拥有这些中的 t 个单位($t=0,1,\cdots,s$)的价值。因此，数量

(61:7) $$u_0=0,\quad u_1,\cdots,u_s,$$

(61:8) $$v_0=0,\quad v_1,\cdots,v_s$$

描述的是这些单位的物品对于每位参与者来说的可变动的价值。正如 61.2.2 中那样，我们取买者在最初状况的效用为零。

没有必要重复 61.2.2、61.3.1 和 61.3.2 有关博弈规则的分析。

容易看到它的特征函数必定是什么：由于每位玩家都能够阻止出售①，像 61.3.3 中那样，我们有

(61:9) $$\mathrm{v}[(1)]=u_s,\quad \mathrm{v}[(2)]=0。$$

由于这两位玩家合起来能够确定将会被转移的单位数，又由于 t 单位转移使他们总共得到 $u_{s-t}+v_t$，所以

(61:10) $$\mathrm{v}[(1,2)]=\mathrm{Max}_{t=0,1,\cdots,s}(u_{s-t}+v_t)。$$

这个 v(S)是一个特征函数，因此它必定满足 57.2.1 的(57:2:a)和(57:2:c)。考虑到(61:9)和(61:10)，它们中不那么明显的一个是

(61:11) $$\mathrm{v}[(1,2)]\geq \mathrm{v}[(1)]。$$

根据(61:10)，(令 $t=0$)上式左边 $\geq u_s+v_0$，且右边 $=u_s$，所以上式成立。

61.5.3 现在，我们考虑(61:10)取最大值时的 t，如 *561*
$t=t_0$。对于所有 t，$u_{s-t_0}+v_{t_0}\geq u_{s-t}+v_t$。我们只需就 $t\neq t_0$ 这

---

① 玩家 1 通过提出一个令人难以接受的高价格，玩家 2 通过压低每个价格。——560，②

么说，而且我们能够分别就 $t>t_0$，$t<t_0$ 陈述。我们可以把这些不等式写成

(61:12) $$u_{s-t_0}-u_{s-t}\geqq v_t-v_{t_0},\quad t>t_0,$$

(61:13) $$u_{s-t}-u_{s-t_0}\leqq v_{t_0}-v_t,\quad t>t_0。$$

(61:12)中令 $t=t_0+1$［$t_0=s$ 除外，此时(61:12)没有意义］：

(61:14) $$u_{s-t_0}-u_{s-t_0-1}\geqq v_{t_0+1}-v_{t_0},$$

而且，(61:13)中令 $t=t_0-1$［$t_0=0$ 除外，此时(61:13)无意义］：

(61:15) $$u_{s-t_0+1}-u_{s-t_0}\leqq v_{t_0}-v_{t_0-1}。$$

注意，(61:12)和(61:13)（在没有令 $t=t_0\pm 1$ 时）能够被写成

(61:16) $$\sum_{i=t_0+1}^{t}(u_{s-i+1}-u_{s-i})\geqq\sum_{j=t_0+1}^{t}(v_j-v_{j-1}),\quad t>t_0,$$

(61:17) $$\sum_{i=t+1}^{t_0}(u_{s-i+1}-u_{s-i})\leqq\sum_{j=t+1}^{t_0}(v_j-v_{j-1}),\quad t<t_0。$$

一般来说，我们能够说，(61:14)和(61:15)只是必要的，而(61:16)和(61:17)则是充分必要的。然而，在这里引入效用递减假设——即对于每位参与者来说，每额外增加一单位商品的效用递减，总效用递增。作为一个公式

(61:18) $$u_1-u_0>u_2-u_1>\cdots>u_s-u_{s-1},$$

(61:19) $$v_1-v_0>v_2-v_1>\cdots>v_s-v_{s-1}。$$

这意味着

(61:20)

$$\left\{\begin{array}{ll}\left.\begin{array}{l}\sum_{i=t_0+1}^{t}(u_{s-i+1}-u_{s-i}) \geqq (t-t_0)(u_{s-t_0}-u_{s-t_0-1}) \\ \sum_{j=t_0+1}^{t}(v_j-v_{j-1}) \leqq (t-t_0)(v_{t_0+1}-v_{t_0})\end{array}\right\} & t>t_0, \\ \left.\begin{array}{l}\sum_{i=t+1}^{t_0}(u_{s-i+1}-u_{s-i}) \leqq (t_0-t)(u_{s-t_0+1}-u_{s-t_0}) \\ \sum_{j=t+1}^{t_0}(v_j-v_{j-1}) \geqq (t_0-t)(v_{t_0}-v_{t_0-1})\end{array}\right\} & t<t_0。\end{array}\right.$$

因此，(61:14)和(61:15)意味着(61:16)和(61:17)。 562
所以，(61:14)和(61:15)也是必要且充分的。结合(61:14)、(61:15)和(61:18)、(61:19)的部分，我们还可以写

(61:21)
$$\begin{cases} u_{s-t_0}-u_{s-t_0-1}, v_{t_0}-v_{t_0-1} \\ \text{中的每一个大于} \\ u_{s-t_0+1}-u_{s-t_0}, v_{t_0+1}-v_{t_0} \\ \text{中的任何一个。} \end{cases}$$ ①

按照通常的想法，最大化的 $t=t_0$ 是实际转移的单位数。我们已经证明，它由(61:21)描述，而且读者可以验证，(61:21)恰好是伯姆巴沃克的"边际对"定义。②

这样，我们看到：

---

① 第一行的第一项与第二行的第二项的比较是(61:14)，第一行的第二项与第二行的第一项的比较是(61:15)。第一项与第一项的比较是得自(61:18)的一个不等式；第二项与第二项的比较是得自(61:19)的一个不等式。——562，①

② 伯姆巴沃克(E. von Böhm-Bawerk)：*Positive Theorie des Kapitals*，4th Edit，耶纳，1921，P. 266ff。——562，②

(61:A)　　交易规模,即转移的单位数 t_0,是按照伯姆巴沃克的"边际对"准则决定的。

在这个程度上,我们可以说,我们理论给出了普通常识结果。

最后,我们还可以看到,当这个博弈是简单博弈时,这种情况有一个简单的含义。这里,按照(61:11)中的不等式,非本质性意味着

$$v[(1,2)] = v[(1)] + v[(2)]。$$

考虑到(61:9)和(61:10),这意味着,在后者中,在 $t=0$,即 $t_0=0$ 时取得最大值。所以,我们看到:

(61:B)　　我们的博弈是非本质博弈的充分必要条件是,其中不发生转移,即 $t_0=0$。①

61.6 价格

61.6.1 现在,让我们考虑这一结构中价格的决定。为了在这方面提供一个解释,就像60.2.2的分析给出的那样,我们必须较为详细地分析我们的博弈的(惟一)解。

从数学上说,当前这一结构并不比61.2—61.4中分析的结构更具一般性:两者都代表本质一般二人博弈,而且,我们知道,存在惟一一个这样的博弈。不过,那里的结构只不过是我们当前这一结构的一个特殊情况:对应着 $s=1$。当我们转向解释时,我们会感受到这一差别。

563 (61.3.3)中的(61:5)、(61:6)与61.5.2中的

① 注意,在61.2.2的方案中,我们通过(61:1)强制发生一次转移。我们现在的结构允许两者都可能。——562,③

(61:9)、(61:10)的比较告诉我们,这两个结构在数学上的等同在于按照

(61:22)　　$u = u_s, v = \mathrm{Max}_{t=0,1,\cdots,s}(u_{s-t} + v_t)$

替换前者的 u, v。

因此,惟一的解由如下分配组成:

$$\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \alpha_2\}\}$$

满足 61.3.3 中的(61:3)、(61:4)。用 α_2 来表达,这意味着

(61:23)　　$0 \leqq \alpha_2 \leqq v - u$。①

现在,让我们用普通的价格概念阐述。② 正如我们在 61.5.3 得出的结论那样,t_0 个单位将被转移给买者 2,如果单位价格为 p,那么,必定有

(61:24)　　$v_{t_0} - t_0 p = \alpha_2$。

所以,用 p 来表达,(61:23)意味着,

(61:25)　　$\frac{1}{t_0}(u_s - u_{s-t_0}) \leqq p \leqq \frac{1}{t_0} v_{t_0}$。③

这也能够被写成

(61:26)　　$\frac{1}{t_0} \sum_{i=1}^{t_0} (u_{s-i+1} - u_{s-i}) \leqq p \leqq \frac{1}{t_0} \sum_{j=1}^{t_0} (v_j - v_{j-1})$。

61.6.2　现在,(61:26)中的界限根本不是伯姆巴沃克理论给出的界限。根据那个理论,价格必须落在 61.5.3 的(61:21)中的两个边际对的效用之间,即落在如下区间之中:

---

① 我们也能够基于 α_1 进行我们的讨论,但当前这一方法更适合在三人市场情况下重复。——563,①

② 值得重申的一点是,这是解释,不是理论本身!——563,②

③ 注意,根据(61:22),$u = u_s, v = u_{s-t_0} + v_{t_0}$。——563,③

(61:27) $$\begin{Bmatrix} u_{s-t_0+1} - u_{s-t_0} \\ v_{t_0+1} - v_{t_0} \end{Bmatrix} \leqq p \leqq \begin{Bmatrix} u_{s-t_0} - u_{s-t_0-1} \\ v_{t_0} - v_{t_0-1} \end{Bmatrix}。$$

这也能够被写成

(61:28) $$\begin{aligned} &\mathrm{Max}(u_{s-t_0+1} - u_{s-t_0}, v_{t_0+1} - v_{t_0}) \\ &\leqq p \\ &\leqq \mathrm{Min}(u_{s-t_0} - u_{s-t_0-1}, v_{t_0} - v_{t_0-1})。\end{aligned}$$

为了方便这个区间与(61:26)的比较,我们构造另一个区间

(61:29) $$u_{s-t_0+1} - u_{s-t_0} \leqq p \leqq v_{t_0} - v_{t_0-1}。$$

564 61.5.3 中(61:20)的后两个不等式($t=0$)给出,(61:26)的下限≧(61:29)的下限,且(61:29)的上限≦(61:26)的上限。因此,区间(61:29)被包含在区间(61:26)之内。再有,(61:29)显然包含区间(61:27),即(61:28)。总之:区间(61:26)、(61:29)和(61:28)按这一顺序相继包含。

这样,我们看到:

(61:C) 单位价格 p 被限于区间(61:26)之内,而伯姆巴沃克的理论将其限制于一个更窄的区间(61:28)。

61.6.3 结果(61:A)和(61:C)精确地描述了我们当前应用中的理论与普通常识性观点的关系。[①] 它们表明,关于即将发生的事情——即转移的单位数——存在着共识,但关于这件事情在什么条件——即单位价格——下发生,存在着分歧。我们的理论给出了那一价格的一个较普

---

① 我们取伯姆巴沃克的理论作为那种观点的一个代表。事实上,自门格尔以来,大多数作家在这个题目上的观点基本上与他的观点相同。——564,①

通观点更宽的区间。

分歧出现在这一点和这个方向上，这是可以理解的。我们的理论（除其他事情之外）基本上依赖于玩家之间的一个完全的补偿机制。这等于说，视转移的单位数不同，支付有所不同。现在，（由伯姆巴沃克的“边际对”定义的）普通观点的较窄的价格区间显著地依赖于一个惟一的价格的存在性——对于实际发生的所有转移来说都是这样。如上所述，由于我们允许溢价和折扣，价格的惟一性不复存在。我们的单位价格 p 只不过是一个平均价格——事实上它由诸如 61.6.1 中的（61:24）定义，而且，相当自然的事情是，我们得到一个较“边际对”所定义的区间更宽的区间。

最后，我们看到，价格结构的建立中表现的这一反常完全符合这样一个事实，即我们考虑的市场是一个双边垄断的市场。

62. $n=3$ 时结果的经济学解释：特殊情况

62.1　$n=3$ 时的特殊情况：三人市场

62.1.1　最后，我们考虑 $n=3$ 的情况。我们希望得到 61.2.1 中那样的解释。为此，我们将把 61.2.2 的有关二人市场的模型推广为一个三人市场模型。

正如我们在前面指出的那样，我们穷尽了前者的讨论，因为只存在一个本质一般二人博弈。另一方面，我们 *565*

知道，本质一般三人博弈构成一个具有三个参数的族而且60.3.2中有关它们的详细讨论迫使我们区别许多可能情况。① 相应地，为了说明所有可能的本质一般三人博弈，我们需要多个模型。我们的讨论仅限于一类典型情况。详尽的讨论十分烦琐，且不会明显增加我们对该理论的理解——不过，这些讨论并不增加新的困难。

62.1.2 我们考虑一个市场中有三个人的情形，其中一个卖者和两个买者。有关两个卖者和一个买者的讨论将给出相同数学结构和相同结论。为了清楚，我们只讨论第一类问题，第二类问题的类似讨论留给读者完成。

三位玩家是1、2、3——1是卖者，2和3是买者。我们将依次考虑61.2.2的特殊方案和61.5.2的较为一般的方案。与我们在那里的发现相比，后者将提供前者的一个真正的推广。

让我们从61.2.2的结构开始：我们要分析的交易是（不可分的）一单位商品A被售给2或3。用u记对于1来说拥有一单位A的价值；用v记它对于2来说的价值，用w记它对于3来说的价值。

为使这些交易对于全体玩家来说有意义，对于每位买者来说，A的价值必须超过它对于卖者的价值。还有，除非玩家2、3恰巧处于同等地位，他们中的一位必须比另一位更有力量，即能够从A的占有中得到更大的效用。我们可以假设，在这种情况下，较有力量的买者是3。这些假

① 两种主要情况(a)和(b)中，后者又被分成图92—95所代表的四种子情况。——565，①

设意味着，我们有：

(62:1) $$u < v \leqq w。$$

正如 61.2.2 和 61.5.2 中那样，我们取每位买者的初始状态为他的零效用。

正如 61.5 中那样，没有必要重复 61.2.2 和 61.3 的有关这一博弈规则的分析。

不难看出该博弈的特征函数：每位买者都能够单独阻止向自己出售，卖者能够阻止出售，两位买者能够共同阻止出售（见 61.5.2）。所以，像 61.3.3 那样，

(62:2) $$\mathrm{v}[(1)] = u, \mathrm{v}[(2)] = \mathrm{v}[(3)] = 0,$$

(62:3) $$\mathrm{v}[(1,2)] = v, \mathrm{v}[(1,3)] = w, \mathrm{v}[(2,3)] = 0,$$

(62:4) $$\mathrm{v}[(1,2,3)] = w。$$①

这个 v(S) 是一个特征函数，所以它满足 57.2.1 中 566
(57:2:a) 和 (57:2:c) 的不等式。验证它们并不困难，我们将其留给读者完成。

就其本质而言，v(S) 所属博弈不是常数和博弈②，因此它更是一个本质博弈。

62.2 预备性讨论

62.2 下面，我们要运用 60.3 中得到的有关本质一般三人博弈的结果，以得到我们当前问题的全部解。我们将再次把数学结果与普通常识所给出的结果进行比较。

---

① 当然了，这用到 $u < v \leqq w$。——565，②

② 证明：57.5.2 中的 (57:20) 未得到满足，如 $\mathrm{v}[(1)] + \mathrm{v}[(2,3)] = u < w = \mathrm{v}[(1,2,3)]$。——566，①

在一定程度上，两者的一致性比 61.2—61.6.3 中的情况还要好，尤其是，两种方法得到的价格上下限是相同的。这大概归于这样一个事实，即正如 61.2.2 中那样，我们正在研究的只是 1 单位商品的交易。在 63.1—63.6 中，当我们过渡到 s 个单位时，61.5.2—61.6.3 的复杂性将再次出现。

然而，超过上面所指的点，我们的理论与普通观点之间会存在着性质上的差异。我们将会看到，这归因于建立联盟的可能性。这种可能性第一次成为现实首次出现于有三位参与者的情况。我们的理论将充分考虑到这一点，而普通方法往往忽略它。因此，从我们的方法的角度看，两种方法的不同是情理之中的事情。

62.3 解：第一种子情况

62.3.1 下面，我们把 60.3.1 和 60.3.2 应用于 (62:2)—(62:4) 的 $\mathrm{v}(S)$。

这一结构中的分配是

$$\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}\},$$

其中，

(62:5) $$\alpha_1 \geqq u, \quad \alpha_2 \geqq 0, \quad \alpha_3 \geqq 0,$$

(62:6) $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = w。$$

为了应用 60.3.1 和 60.3.2，我们必须把这一分配变成其简化型，并将其正规化，$\gamma = 1$。

第一个运算对应着我们的 α_1、α_2、α_3 被 α'_1、α'_2、α'_3 取代，

(62:7) $$\alpha'_k = \alpha_k + \alpha_k^0。$$

这一运算是 57.5.1、31.3.2 和 42.4.2 中提到或讨论过

的。α_1^0、α_2^0、α_3^0 的取得类似于 59.2.1 中(59:A)的推导。具体来说， 567

(62:8) $\alpha'_1=\alpha_1-\frac{w+2u}{3},\alpha'_2=\alpha_2-\frac{w-u}{3},$

$\alpha'_3=\alpha_3-\frac{w-u}{3}$。

v(S)的相应变化由 59.2.1 中的(59:1)给定；它们把(62:2)—(62:4)变成

(62:9) $v'[(1)]=v'[(2)]=v'[(3)]=-\frac{w-u}{3},$

(62:10) $v'[(1,2)]=\frac{3v-2w-u}{3},v'[(1,3)]=\frac{w-u}{3},$

$v'[(2,3)]=-\frac{2(w-u)}{3},$

(62:11) $v'[(1,2,3)]=0$。

因此，$\gamma=\frac{w-u}{3}$，从而第二个运算是用这个量去除每个量。我们并不这么做，而宁愿直接应用 60.3.1 和 60.3.2，在各处(其中假设了 $\gamma=1$)插入比例因子$\frac{w-u}{3}$。① 与 60.3.1 中(60:8)的比较告诉我们，

$$a_1=-\frac{2(w-u)}{3},a_2=\frac{w-u}{3},a_3=\frac{3v-2w-u}{3}。$$

60.3.2 中(60:15)的六条线描述我们据以得出我们的解的三角形。现在，这六条线变成了：

---

① 这一方法类似于第 47 节中有剩余的本质三人零和博弈讨论中使用的方法，尤其见 47.2.2 和 47.3.2[情况(II)]、47.4.2[情况(IV)的一个特定阶段]。——567，①

(62:12)

$$\begin{cases}\alpha'_1=-\dfrac{w-u}{3},\alpha'_2=-\dfrac{w-u}{3},\alpha'_3=-\dfrac{w-u}{3},^{①}\\ \alpha'_1=\dfrac{2(w-u)}{3},\alpha'_2=-\dfrac{w-u}{3},\alpha'_3=-\dfrac{3v-2w-u}{3}。^{②}\end{cases}$$

62.3.2 现在,我们能够讨论 60.3.3 那样的图示了。显然,

$$a_1+a_2+a_3=v-w\leqq 0,$$

568 因此,我们有(60:17:b),即我们有那里的情况(b),而且仍有待决定的是,图 92—95 所代表的其四种子情况中的哪一个将会出现。因此,我们从这里开始图形表示。

对于这一表示方式,像从前那样,我们利用图 52 的平面。像 60.3.2 中的(60:15)那样,画出(62:12)的六条线,我们得到图 96。这个图有如下性质:

(62:A:a) 第二条 α'_1 线通过第一条 α'_2 线和第一条 α'_3 线的交点。事实上:

$$\frac{2(w-u)}{3}-\frac{w-u}{3}-\frac{w-u}{3}=0。$$

(62:A:b) 两条 α'_2 线等同。

(62:A:c) 第二条 α'_3 线位于第一条 α'_3 的左侧。事实上:它有一个更大的 α'_3 值,因为

---

① (60.15)中的 -1 代表着 $-\gamma$,所以我们必须用上述比例因子 $\frac{w-u}{3}$ 去乘它。——567,②

② 在这里再次出现的(60:15)中的 $-a_1$、$-a_2$、$-a_3$ 已经包含着因子 $\frac{w-u}{3}$。——567,③

$$-\frac{3v-2w-u}{3}+\frac{w-u}{3}+\frac{w-u}{3}=w-v\geqq 0。$$

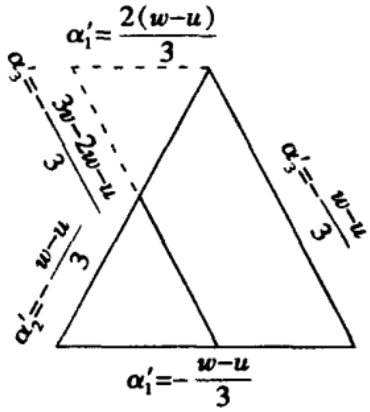

图 96

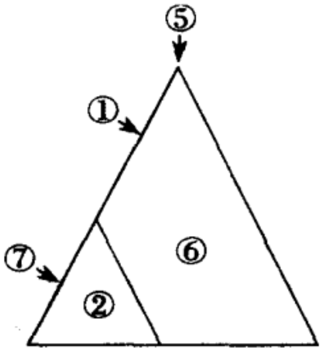

图 97

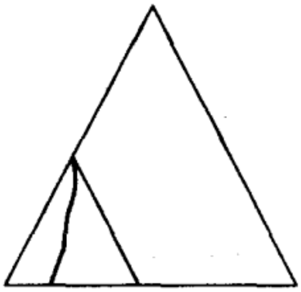

图 98

将这些图与图 92—95 比较表明，它是图 94 的一个（旋转的）退化型：[①]区域⑤退化成了一个点（基本三角形△的上顶点），区域①、⑦也退化了，但退化成了两个线段 569 （基本三角形△的左边的上下两段），而区域⑥、②尚未退化（基本三角形△被分为一个梯形和一个较小的三角形）。图 94 的五个区域的这一划分如图 97 所示。如

① 关于这一点和下面的说明，见第 553 页脚注④。——568，①

60.3.3末尾指出过的那样，通过把图 86 的图形变成图 97 描述的情况，我们就得到了一般解 V，结果见图 98。[①]

62.4 解：一般形式

62.4 在进一步深入下去之前，我们要提醒的一点是，图 97 有着一般性，假设

(62:13) $$u < v \leqq w,$$

但是，它给出的这个图满足

(62:14) $$v < w。$$

当

(62:15) $$v = w$$

时，图 97 中的区域①——即基本三角形左边的上段——退化为一个点。[见 62.3.2 中的(62:A:c)。]因此，在这种情况下，图 98 假设着图 99 的出现。

借助下面的假设，这里的讨论能够被弄得对于玩家 2、3——两个买者——来说相当对称：

假设(62:14)或(62:15)，我们可以用较弱的条件

(62:16) $$u < v, w$$

来替换(62:13)。让我们仅仅假设(62:16)——且不再假设(62:13)。这意味着，每位买者都比卖者从 A 的占有中得到更大效用。(见 62.1.2 的第一部分中的讨论。)

570 这样，(62:16)留下了三种可能性：(62:14)、(62:15)和

(62:17) $$v > w。$$

(62:14)、(62:15)的解由图 98 和图 99 给定。(62:17)得

① 图 98 中的曲线满足 47.5.5 中(47:6)。——569,①

自(62:15)中玩家 2、3——两位买者——和 v、w 对换。这意味着，图 98 必须(在对换 v、w 后)沿着其垂直中线折射，如图 100 所示。

总之：

(62:B)　假设(62:16)，对于 $v<$、$=$、$>w$，一般的解 V 分别由图 98、99 和 100 给出。

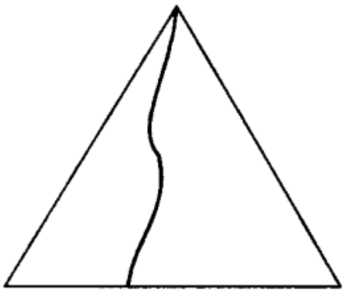

图 99

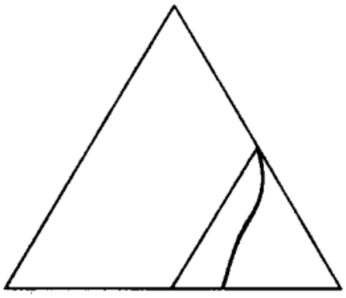

图 100

62.5 结果的代数形式

62.5.1 图 98 所表达的结果能够被代数地表述如下：[1]

解 V 由基本三角形的左边的上面的一段和穿过小三角形的曲线组成。

V 的第一部分有下面的式子描述：

$$\alpha'_2=-\frac{w-u}{3},\ -\frac{3v-2w-u}{3}\geqq\alpha'_3\geqq-\frac{w-u}{3}。$$

由于 62.3.1 中的(62.8)，这意味着，

---

① 注意，尽管有(62:B)，只要 $v\leqq w$，它就成立。——570，①

$$\alpha_2 = 0,\quad w - v \geqq \alpha_3 \geqq 0。$$

这样,62.3.1 中的(62:6)给出

$$\alpha_1 = w - \alpha_3,$$

因此,上述条件能够被写成

(62:18) $v \leqq \alpha_1 \leqq w,\quad \alpha_2 = 0,\quad \alpha_3 = w - \alpha_1$。

V 的第二部分(曲线)是从上述最小的 α'_1 到 $\alpha'_1\left(-\frac{w-u}{3}\right)$的绝对最小值的扩展。其几何形状[见 47.5.5 中(47:6)]能够被描述为:沿着它,α'_2、α'_3 都是 α'_1 的单调递减函数。我们可以再次通过 62.3.1 中的(62:8)从 α'_1、α'_2、α'_3 过渡到 α_1、α_2、α_3。这样,α_1 从其在(62:18)中的最小值(v)变化到其绝对最小值(u),而且 α_2、α_3 仍然是 α_1 的单调递减函数。所以,我们有:

(62:19) $u \leqq \alpha_1 \leqq v$,α_2、α_3 是 α_1 的单调递减函数。①②

571 因此,一般解 V 是(62:18)和(62:19)给出的两个集合的并集。我们将会看到,(62:19)中提到的函数(在一定范围内)具有随意性,但一个明确的解(即一个明确的行为标准)对应着明确选定这些函数。这种情形十分类似于 47.8.2 的(47:A)中和 55.12.4 中分析的那些情况。

62.5.2 只要 $v \leqq w$,(62:18)、(62:19)就能够被利用(见第 570 页脚注①)。对于 $v = w$,(62:18)简单地是

---

① 当然,它们必须符合 62.3.1 中的(62:5)和(62:6)。——570,②

② 如图 98 所示,V 的第一部分的最低点与第二部分的最高点重合。也就是说,(62:18)和(62:19)的点 $\alpha_1 = v$ 相同。

所以,我们能够从(62:18)和(62:19)之一中排除 $\alpha_1 = v$。(但不能从两者中都将其排除!)——570,③

(62:20)　　$\alpha_1 = v, \alpha_2 = \alpha_3 = 0$。

因此，只有当 $v < w$ 时，我们才利用(62:18)和(62:19)；当 $v = w$ 时，我们利用(62:20)和(62:19)。[①]

如果 $v > w$，那么，通过对换玩家 2、3——两位买者——和 v、w，我们能够利用(62:18)和(62:19)。这样，(62:18)和(62:19)变成了

(62:21)　　$w \leqq \alpha_1 \leqq v$，　$\alpha_2 = v - \alpha_1$，　$\alpha_3 = 0$。[②]

(62:22)　　$u \leqq \alpha_1 \leqq w$，　α_2、α_3 是 α_1 的单调递减函数。[③]

总之：

(62:C)　　假设(62:16)，对于 $v <$、$=$、$> w$，一般解分别由(62:18)、(62:19)，(62:20)、(62:19)，(62:21)、(62:23)给出。

62.6　讨论

62.6.1　接下来，让我们对一个卖者、两个买者和一单位不可分的商品的市场进行普通常识性分析，为的是将结果与(62:C)中的数学结果进行比较。

这一常识方法的轮廓是清楚的：我们在这里面对的是

---

① 第 570 页脚注③有关(62:18)和(62:19)的结果也适用于(62:20)和(62:19)。所以，我们能够干脆忽略(62:20)，不过，为了便于 62.6 中的解释，我们将其保留。——571，①

② 注意，由于上述玩家对换，62.1.2 中的(62:4)变成了

(62:22)　　$v[(1,2,3)] = v$，

从而 62.3.1 中的(62:6)变成了

(62:6*)　　$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = v$。——571，②

③ 第 570 页脚注③关于(62:18)、(62:19)的说明也适用于(62:21)、(62:23)。当然了，我们必须用 w 替换其 v。——571，③

"边际对"理论的最简单特殊情况。理由是:

卖者只有一单位不可分的商品且存在着两位买者。因此,买者中的一个进入交易,而另一个被排斥在外。显然,较有力量的那个买者将被排在第一位——除非两位玩家同样有力量,此时,两者都有这一资格。相应地,交易发生的价格将位于被接纳和被排斥的买者的界限之间——如果他们恰好同样有力量,那么,价格必定恰好是他们的共同界限。为了有一个真正的三人市场,卖者的界限必须

572 被假设得低于任何一位买者的界限,并不起作用。

在我们的数学公式中,卖者的极限和两位买者的界限分别是 u、v、w。上面的说明意味着,

(62:16) $$u < v, w。$$

关于价格的这些说法等于说

(62:24) $$v \leqq p \leqq w, \quad v < w,$$

(62:25) $$p = v, \quad v = w,$$

(62:26) $$w \leqq p \leqq v, \quad v > w。$$

被排斥的买者在他的起点结束——即在我们的效用正规化中位于零效用。

因此,正如(62:C)给出的那样,我们的当前的陈述严格对应着(62:18)、(62:20)和(62:21)。

至此,数学结果与常识一致。但是,这种一致的有限性也是显而易见的:(62:C)还给出了(62:19)、(62:23)这两个分配,而且,如上所述,在普通处理中,这些分配并不出现。

那么,(62:19)、(62:23)的含义是什么呢?难道它们代表着我们的理论与常识性观点之间的冲突吗?

不难回答这些问题，并看出真正的冲突并不存在，不过，(62:19)、(62:23)代表着常识观点的真正扩展。

62.6.2　卖者在一个给定的分配中得到的数额 α_1 显然是提出这一分配时想到的价格 p。在(62:19)和(62:23)中，α_1 的变化范围是从 u 到 v 或 w（视哪一个较小而定）——也就是说，价格的变动范围是从卖者的界限到较弱的买者的界限。两位买者得到的（可变）数额之间存在着确定的（单调）函数关系。①

这两个事实强烈暗示着(62:19)和(62:23)的如下文字解释：以一定的利益分配规则为基础，两位买者已经形成一个联盟，并正在与卖者讨价还价。利益分配规则被包含在(62:19)和(62:23)中出现的单调函数之中。任何讨价还价都不可能使卖者位于他本人的极限之下。② 另一方面，高于较弱的买者的价格则会排除他施加任何影响的可能性。

包含在(62:19)、(62:23)中的特定规则以及所有参与者在这些情形中的作用可以有更为宽泛的文字解释。这不是我们这里的任务，因为上述讨论应该充分地证明了我们的要点：一方面，(62:18)、(62:20)和(62:21)（即图98—100 中 V 的居于上面的部分）对应着两位买者为交易而展开的竞争——其中，如果存在的话，较强的买者肯定会胜利；另一方面，(62:19)、(62:23)（即图 98—100 中 V 573

① 所有这些“数额”都指我们所谓的仅存的一单位不可分商品的效用。——572,①

② 卖者的极限是把 A 出售之外的最优备择用途。——572,②

的居于下面的部分，曲线）对应着两位买者针对卖者的一个联盟。

经典的分析——至少在62.6.1中使用的形式上——仅仅给出第一种可能性，没有考虑到联盟。我们的理论必然在这方面有所不同：它包含两种可能性，事实上，在它产生的解中，它把它们结合为一个整体。视是否有联盟而将它们分离仅仅是相对简单的三人博弈的一个文字评述，没有理由相信，这样的评述对于所有博弈来说都能够做到，而数学理论严格适用于所有情况。

63. $n=3$ 时结果的经济学解释：一般情况

63.1 可分物品

63.1.1 我们接下来的任务是，像61.5.2和61.5.3中给出的61.2.2的二人结构扩展那样，我们要把62.1.2的三人结构加以推广。

相应地，我们要回到62.1.2中描述的情形：在一个市场中有一个卖者1和两个（可能的）买者2、3。现在，我们允许 s 个单位（不可分的且相互替代的）某种商品 $A_1,\cdots,A_s$ 中的任意多个单位的交易。（见第560页脚注①。）用 u_t 记这些单位的第 $t(=0,1,\cdots,s)$ 个单位对于1来说的价值，用 v_t 记它对于2来说的价值，用 w_t 记它对于3来说的价值。因此，数量

(63:1) $$u_0=0,\quad u_1,\cdots,u_s,$$

(63:2) $$v_0=0,\quad v_1,\cdots,v_s,$$

(63:3) $$w_0=0,\quad w_1,\cdots,w_s,$$

描述这些单位对于每位参与者来说的可变效用。

如前面那样，我们取每位买者的初始状态为其零效用。

如 61.5.2、61.5.3 和 62.1.2 中那样，我们不必重复 61.2.2、61.3.1 和 61.3.2 中关于这一博弈的规则的分析。

容易看出，其特征函数必定是：因为每位买者都能够阻止向他本人出售，每位卖者能够阻止出售，且两位买者能够合起来阻止任何出售（见 61.5.2 和 62.1.2），如 61.3.3那样，我们有：

(63:4) $$\mathrm{v}[(1)]=u_0,\mathrm{v}[(2)]=\mathrm{v}[(3)]=0,$$

(63:5) $$\mathrm{v}[(2,3)]=0。$$

用 t、r 分别记从卖者 1 向买者 2、3 转移的单位数，那么，要表达其余联盟(1,2)、(1,3)和(1,2,3)——卖者与买者之一或全部——能够取得什么也不难。熟知的论述 574
给出

(63:6) $$\mathrm{v}[(1,2)]=\mathrm{Max}_{t=0,1,\cdots,s}(u_{s-t}+v_t),$$

$$\mathrm{v}[(1,3)]=\mathrm{Max}_{r=0,1,\cdots,s}(u_{s-r}+w_r),$$

(63:7) $$\mathrm{v}[(1,2,3)]=\mathop{\mathrm{Max}}_{\substack{t,r=0,1,\cdots,s\\ t+r\leq s}}(u_{s-t-r}+v_t+w_r)。$$[1]

这个 v(S)是一个特征函数。我们请读者验证隐含其中的不等式。

有关该博弈在什么时候是本质博弈的讨论能够像

---

[1] Max 下的额外条件表达的是，售出的单位数 $t+r$ 不会超过卖者当初拥有的个数。——574，①

61.5.2 和 61.5.3 那样给出，我们也将其留给读者。① 我们还有可能确定两位买者 2、3 之一在什么情况下成为我们的分解理论意义上的哑玩家。我们将不对此进行讨论。结果并不难得到，不过，不那么有意义。

63.1.2 把(63:7)的最大值中的 r 限定为 0，那么，这就变成了(63:6)第一个最大值。进一步令 $t=0$，它就变成了 u_s。这两个运算中的每一个都使结果变得≦原来的值，即我们有

(63:8) $\quad v[(1)] \leqq v[(1,2)] \leqq v[(1,2,3)]$。

如果对 r、t 以相反的顺序做同样的运算，我们得到

(63:9) $\quad v[(1)] \leqq v[(1,3)] \leqq v[(1,2,3)]$。

考虑(63:8)的第一个不等式。要这个不等式成立，(63:6)中第一个最大值必须在 $t=0$ 时实现。根据有关这个题目的常有概念，这意味着，在买者 3 不出现的情况下，卖者和买者 2 不会实现转移。也就是说，在买者 3 不出现的情况下，买者 2 无法使市场发挥作用。

考虑(63:8)中的第二个不等式。要这一不等式成立，(63:7)中的最大值必须在 $r=0$ 时实现。根据有关这个题目的常有概念，这意味着，在买者 2 不出现的情况下，卖者和买者 3 不会实现转移。也就是说，在买者 2 不出现的情况下，买者 3 无法参与市场。

将这些结果与有关(63:9)的相应说法结合起来，我们有：

---

① 其余 $s=1$ 时的 62.1.2 中的(62:1)或 62.4 中的(62:16)的关系也不难说明。请记住 61.5.3 末尾(61:B)的讨论和第 562 页脚注③。——574，②

(63:A)　　在(63:8)和(63:9)的四个不等式中，任何一个等号都是其中一个买者变弱的迹象。

在(63:8)[(63:9)]的第一个不等式中，它意味着，在买者 3(2)不出现的情况下，买者 2(3)不能够使市场发挥作用。在(63:8)[(63:9)]的第二个不等式中，它意味着，在买者 2(3)不出现的情况下，买者 3 不能够影响市场。

显然，当所有这些弱化都被排除了的时候，真正有意 575
义的情况就出现了。因此，我们可以合理做出如下假设：

(63:B:a)　　在(63:8)和(63:9)的第一个不等式中，我们有 <。

(63:B:b)　　在(63:8)和(63:9)的第二个不等式中，我们有 <。

63.2　有关不等式的分析

63.2.1　暂时地，假设我们有(63:B:a)，但没有(63:B:b)。这意味着，两位玩家之一绝对地比另一位玩家更有力量。更确切地说：他至少与另外一位玩家同样有力量，即便他想把另一位玩家彻底逐出市场。

因此，在这种情况下，我们可以预期结果将类似于 62.1.2—62.5.2 中只有一单位(不可分的)A 时的结果。也就是说，这里，把供给分成单位 $A_1, \cdots, A_l$ 的这一可分性应该给出预期结果。

情况的确如此。为证明它，引入数量 u、v、w：

(63:10) $\quad v[(1)] = u, v[(1,2)] = v, v[(1,3)] = w$。

这样,(63:8)和(63:9)的第二个不等式和(63:B:b)的否定给出

(63:11) $\quad v[(1,2,3)] = \mathrm{Max}(v, w)$。

而(63:8)和(63:9)的第一个不等式以及(63:B:a)给出

(63:12) $\quad u < v, w$。

现在,我们恰恰有62.1.2—62.5.2的条件:(63:12)与62.4中的(62:16)相同,而(63:4)、(63:10)给出62.1.2中的(62:2)、(62:3),而且,(63:11)给出62.1.2中的(62:4)(当$v \leqq w$时)或62.5.2中的(62:22)(当$v \leqq w$时)。

所以,62.4和62.5.2的结果成立,其中有(63:10)的u、v和w。根据图98—100,一般解像62.4中(62:B)描述的那样求得。

63.2.2 从现在开始,我们假设(63:B:a)和(63:B:b)都成立。我们引入数量u、v、w、z如下:

(63:13) $\quad v[(1)] = u, v[(1,2)] = v, v[(1,3)] = w$,

(63:14) $\quad v[(1,2,3)] = z$。

这样,(63:8)、(63:9)和(63:B:a)、(63:B:b)说明,

(63:15) $$u < \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} < z。$$

576 这一方案不同于62.1.2,不过,将其进行详细比较还是值得的:(63:15)对应着那里的(62:1),而(63:4)、(63:13)和(63:14)对应着那里的(62:2)—(62:4)。

这里,像61.5.2和61.5.3那样,引入递减效用假设也有方便之处。事实上,与那里相比,我们在更早的阶段

就需要它:现在,在该理论的数学部分中,它是有用的[①],而在那里我们只是在解释部分才用到它。

我们把对于所有三位玩家 1、2、3 来说的效用递减陈述如下:

(63:16)　$u_1 - u_0 > u_2 - u_1 > \cdots > u_s - u_{s-1}$,

(63:17)　$v_1 - v_0 > v_2 - v_1 > \cdots > v_s - v_{s-1}$,

(63:18)　$w_1 - w_0 > w_2 - w_1 > \cdots > w_s - w_{s-1}$。

在直接的应用中,只有(63:16)是必需的。这是说:

(63:19)　$v + w > z + u$。[②]

证明:由(63:6)、(63:7)和(63:13)、(63:14),命题(63:19)能够被重写为:

$$\mathrm{Max}_{t=0,1,\cdots,s}(u_{s-t}+v_t) + \mathrm{Max}_{r=0,1,\cdots,s}(u_{s-r}+w_r)$$
$$> \mathrm{Max}_{\substack{t,r=0,1,\cdots,s \\ t+r\leq s}}(u_{s-t-r}+v_t+w_r) + u_s。$$

考虑右边取得最大值的 t、r。因为我们有(63:B:b),即(63:8)、(63:9)的第二个不等式中的 <,我们能够从 63.1.2 的论述中得出结论:这些 t 和 $r \neq 0$。我们将其记为 t_0、r_0。因此,我们的命题变成了

$$\mathrm{Max}_{t=0,1,\cdots,s}(u_{s-t}+v_t) + \max_{r=0,1,\cdots,s}(u_{s-r}+w_r)$$
$$> u_{s-t_0-r_0} + v_{t_0} + w_{r_0} + u_s。$$

即,我们断言:存在 t、r 满足

---

① 但并非必然。这一性质的缺失只会使讨论变得复杂一些。——576,①

② 在 62.1.2 中,这是平凡的。事实上,利用(63:13)、(63:14),我们在那种情况下得到

$$u < v \leqq w = z。$$

而且,这直接给出(63:19)。——576,②

$$u_{s-t}+v_t+u_{s-r}+w_r>u_{s-t_0-r_0}+v_{t_0}+w_{r_0}+u_s。$$

当 $t=t_0, r=r_0$ 时，情况的确如此。上面的不等式可以被重写为

(63:20) $\quad u_{s-r_0}-u_{s-t_0-r_0}>u_s-u_{s-t_0}$。

概念上应该清楚的一点是，这得自我们的递减效用假设。形式上，它以如下方式得自(63:16)：(63:20)说明，

577 (63:21) $\quad \sum_{i=1}^{t_0}(u_{s-r_0-i+1}-u_{s-r_0-i})>\sum_{i=1}^{t_0}(u_{s-i+1}-u_{s-i})$。

(63:16)意味着，当 $s'<s''$ 时，

$$u_{s'}-u_{s'-1}>u_{s''}-u_{s''-1},$$

从而，

$$u_{s-r_0-i+1}-u_{s-r_0-i}>u_{s-i+1}-u_{s-i},$$

而且，这直接给出(63:21)。

63.3 准备性讨论

63.3 下面，我们要把 60.3.1 和 60.3.2 应用于当前这一结构。事实上，这很类似于 62.3 中给出的其在 62.1.2的结构中的应用。因此，下面的阐述将较为简要，读者最好对照着 62.3 的相应部分阅读。

至于数学结果与普通常识结果的比较，62.2 的说明再次适用。我们已经在那里指出了当前这一结构所带来的复杂性。我们只简要地分析这种情况，尽管它相当重要。我们前面的简单例子充分说明了一般的观点，而且关于这一结构的具体而详尽解释性分析——其他更为一般的分析——将在以后的著述中给出。

63.4 解

63.4.1 当前结构中的分配是

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},$$

其中，

(63:22)　　$\alpha_1 \geqq u, \quad \alpha_2 \geqq 0, \quad \alpha_3 \geqq 0,$

(63:23)　　$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = z$。

引入简化型再次成为必要。这等于 62.3 中那样的一个变换

(63:24)　　$\alpha'_k = \alpha_k + \alpha_k^0$。

那里的讨论决定 α_1^0、α_2^0、α_3^0，从而，(63:24)变成

(63:25)　　$\alpha'_1 = \alpha_1 - \frac{z+2u}{3}, \quad \alpha'_2 = \alpha_2 - \frac{z-u}{3},$

$$\alpha'_3 = \alpha_3 - \frac{z-u}{3}。$$

v(S)的相应变化再次由 59.2.1 中(59:1)给出。它们把(63:4)、(63:13)和(63:14)变成

(63:26)　　$v'[(1)] = v'[(2)] = v'[(3)] = -\frac{z-u}{3},$

(63:27)　　$v'[(1,2)] = \frac{3v-2z-u}{3},$ 578

$$v'[(1,3)] = \frac{3w-2z-u}{3},$$

$$v'[(2,3)] = -\frac{2(z-u)}{3},$$

(63:28)　　$v'[(1,2,3)]) = 0$。

因此，$\gamma = \frac{z-u}{3}$，而且我们再次避开了过渡到 $\gamma = 1$ 的正

规化。

从而，当我们像62.3描述的那样应用60.3.1和60.3.2时，我们再次必须插入一个比例因子。现在，这个比例因子是$\frac{z-u}{3}$。

与60.3.1中(60:8)的比较告诉我们

$$a_1=-\frac{2(z-u)}{3},a_2=\frac{3w-2z-u}{3},a_3=\frac{3v-2z-u}{3}。$$

我们的解得自60.3.2中(60:15)描述三角形的六条线。现在，这六条线变成了

$$(63:29)\begin{cases}\alpha'_1=-\frac{z-u}{3},\alpha'_2=-\frac{z-u}{3},\alpha'_3=-\frac{z-u}{3},\\ \alpha'_1=\frac{2(z-u)}{3},\alpha'_2=-\frac{3w-2z-u}{3},\\ \qquad\alpha'_3=-\frac{3v-2z-u}{3}。\end{cases}$$

63.4.2 应用60.3.3的准则，我们发现

$$a_1+a_2+a_3=v+w-2z\leqq 0。$$

因此，我们再次有那里的(60:17:b)——即那里的情况(b)，而且，图92—95所代表的四种子情况中的哪一种出现仍有待确定。

按照62.3中那样的图示方法，我们得到图101。这个图的特性得自如下分析：

(63:C:a) 第二条α'_1线通过第一条α'_2线与第一条α'_3线的交点。事实上：

$$\frac{2(z-u)}{3}-\frac{z-u}{3}-\frac{z-u}{3}=0。$$

(63:C:b)　　第二条 $\alpha'_2(\alpha'_3)$ 线位于第一条的左(右)边。

(63:C:c)　　事实上:它有一个更大的 $\alpha'_2(\alpha'_3)$ 值,因为

$$-\frac{3w-2z-u}{3}+\frac{z-u}{3}=z-w>0,$$ 579

$$-\frac{3v-2z-u}{3}+\frac{z-u}{3}=z-v>0。$$

(63:C:d)　　第一条 α'_1 线位于第二条 α'_2 线与 α'_3 线交点的下方。事实上,由 63.2.2 中的(63:19):

$$-\frac{z-u}{3}-\frac{3w-2z-u}{3},-\frac{3v-2z-u}{3}$$

$$=z+u-v-w<0。$$

这个图与图 92—95 的比较告诉我们,它也是图 94 的(旋转和)退化(见第 568 页脚注①),尽管其退化程度较 62.3 中相应的图 96 轻一些:区域⑤再次退化为一个点(基本三角形△的上顶点),但区域①、②、⑥、⑦仍不退化(我们的图中,基本三角形分为这四个部分)。图 94 的五个区域分解见图 102。现在,正如 60.3.3 末尾所说那样,一般解通过把图 86 的图形代入图 102 所描述的情况来得到。结果见图 103(见第 569 页脚注①)。

总之: 580

(63:D)　　假设(63:B:a)、(63:B:b)和(63:16),一般解 V 由图 103 给出。

这个图与 62.3—62.4 的那些图比较告诉我们,图 103 是介于图 98—100 的中间形式,而且,这些图反过来是图

103 的退化形式。

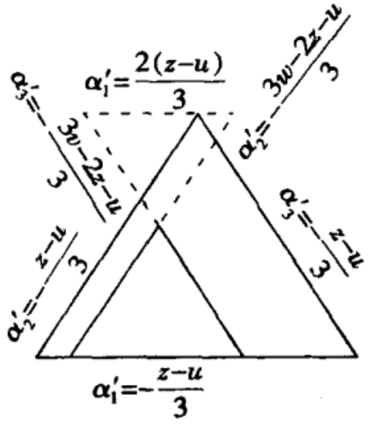

图 101

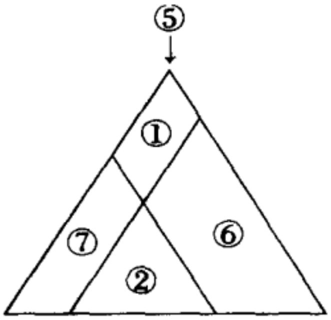

图 102

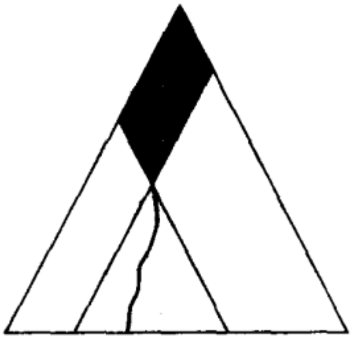

图 103

63.5　结果的代数形式

63.5　正如我们对 62.5.1 中图 98 所阐述的那样，图 103 所表达的结果也能够有代数表述。

图 103 中，解 V 由阴影区域和一条曲线组成。V 的第一部分由下面的式子描述：

$$-\frac{3w-2z-u}{3}\geqq\alpha'_2\geqq-\frac{z-u}{3},$$

$$-\frac{3v-2z-u}{3}\geqq\alpha'_3\geqq-\frac{z-u}{3}。$$

由 63.4.1 中的(63:25),这意味着,

$$z-w\geqq\alpha_2\geqq0,\quad z-v\geqq\alpha_3\geqq0。$$

现在,63.4.1 中的(63:23)给出,

$$\alpha_1=z-\alpha_2-\alpha_3,$$

从而,α_1 的严格范围是

$$v+w-z\leqq\alpha_1\leqq z。$$

[请回忆一下,由 63.2.2 中的(63:19),$v+w-z>u$。]我们把这些条件合在一起陈述,所以这里的结果比 62.5.1 中其类似结果(62:18)复杂。这个结果是:

(63:30)

$$\begin{cases}v+w-z\leqq\alpha_1\leqq z,\quad 0\leqq\alpha_2\leqq z-w,\quad 0\leqq\alpha_3\leqq z-v,\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=z。\end{cases}$$

(63:30)中第一行恰好是 α_1、α_2、α_3 的取值范围。

V 的第二部分(曲线)能够一字不漏地像 62.5.1 那样讨论:α_1 从其在(63:30)中的最小值($v+w-z$)变化到其绝对最小值(u),而且 α_2、α_3 是 α_1 的单调递减函数。所以,我们有:

(63:31)　　$u\leqq\alpha_1\leqq v+w-z,$

其中,α_2、α_3 是 α_1 的单调递减函数。

因此,一般解 V 是由(63:30)和(63:31)给定的两个集合的并集。我们将会看到,(63:31)的函数与 62.5.1 末尾讨论的那个函数的作用相同。

总之:　581

(63:E)　　假设(63:B:a)、(63:B:b)和(63:16),一

般解 V 由(63:30)和(63:31)给出。

63.6 讨论

63.6.1. 下面,我们要完成与 62.6 对等的工作,并把普通常识性分析应用于一个卖者、两个买者和不可分的 s 个单位的某种物品,为的是将其结果与(63:E)中表述的数学结果比较。

实际上,下面要给出的解释必须把 61.5.2—61.6.3 的想法与 62.6 的想法结合起来:前者适用是因为我们有分成 s 个单位的可分性;后者适用是因为现在的市场是一个三人市场。正如 63.3 中指出的那样,我们不准备详细讨论这种情况。

我们现在的解的两个组成部分是(63:30)和(63:31)。它们明显类似于 62.5 中得到的两个部分:(62:18),(62:19)[或(62:20)、(62:19);或(62:21)、(62:23)]。[也可见有 62.5.2 中(62:C)的 63.5 中的(63:E)。]因此,我们完全有理由像我们在 62.6.2 中相应情况下所作那样来解释它们:(63:30)描述的情况是,两位买者为卖者手中的 s 个单位的物品而竞争,而(63:31)描述的情况是,他们建立一个同盟并作为一个整体来对付卖者。读者可以轻易完成类似于 62.6.2 的详细讨论。

接受了这些之后,关于(63:31),也就没有什么值得说的新东西了。在这种情况下,买者已经联合起来并不再竞争。然而,描述他们之间的竞争的(63:30)仍然值得我们注意。

让我们考虑属于(63:30)的分配,并用普通的价格概念来阐述其内容。这等价于我们在 61.6.1—61.6.2 中相

应地方所做的事情。

我们再次引入 $t,r;t=t_0,r_0$ 时有如下最大值

(63:7) $$v[(1,2,3)] = \underset{\substack{t,r=0,1,\cdots,s\\ t+r\leq s}}{\text{Max}}(u_{s-t-r}+v_t+w_r)$$

由于我们的分配是

$$\{\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}\},\quad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=v[(1,2,3)]。$$

实际上要分配的数额是 v[(1,2,3)]，t_0、r_0 必定代表着从卖者分别向买者 2、3 实际转移的单位数。

61.5.2 和 61.5.3 给出的(61:A)的分析能够在稍做修改后照搬到这里。这表明，正如我们在那里就转移单位数 t_0 所阐述的那样，这里转移的单位数 t_0、r_0 能够用伯姆巴沃克的"边际对"准则来描述。由于这个讨论不会带来新的东西，我们不再继续下去。

63.6.2 下面，我们讨论价格问题。如上所述，买者 2、 582
3 分别收到 t_0、r_0 个单位。另一方面，分配 $\vec{\alpha}$ 赋予他们数额 α_2、α_3。这两种描述只有借助下面的方程才能协调起来：

(63:32) $$v_{t_0}-t_0p=\alpha_2,$$

(63:33) $$w_{r_0}-r_0q=\alpha_3,$$

p,q 分别是由买者 2、3 支付的每单位价格。(63:32)和(63:33)等价于 61.6.1 中(61:24)，不过，必须强调的一点是，对于两位买者，我们得到了两个不同的价格！

现在，(63:30)能够用 p、q [①]表述为：

---

① 其有关 α_2、α_3 的说法能够借助(63:32)和(63:33)转换为有关 p、q 的说法。

利用 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=z$，关于 α_1 的(63:30)只不过是关于 α_2、α_3 的那些说法的一个结果而已。因此，我们不必考虑它。——582，①

$$(63:34)\qquad \frac{1}{t_0}(v_{t_0}-z+w)\leqq p\leqq\frac{1}{t_0}v_{t_0},$$

$$(63:35)\qquad \frac{1}{r_0}(w_{r_0}-z+v)\leqq q\leqq\frac{1}{r_0}v_{r_0}。$$

这些不等式类似于 61.6.1 中的(61:25)。我们能够以类似方式对待它们,并将其与得自伯姆巴沃克理论的应用的极限进行比较。鉴于 63.3 中给出的理由,我们将不给出这一工作的细节。几点说明还是值得的。

区间(63:34)和(63:35)再次比伯姆巴沃克理论的区间宽——正如 61.6 中那样[见(61:C)]。一些数字例子表明,这一差异趋于变小。因此,有可能,随着买者人数的增加会趋于消除买者联盟带来的这个差别。然而,我们必须十分小心地对待这一猜想,因为我们十分清楚随着参与者人数的增加,解的复杂性增加得多么快,解的不同部分的解释会变得多么困难。

我们将会看到,我们不得不为两位买者引人两个(有可能)不同的价格,尽管我们的完全信息假设仍然成立。这与 61.6.3 的解释完全一致:我们在那里看到,所谓的价格实际上是若干不同交易的平均价格,卖者和买者必定一直面对着溢价和折扣。所有这些必定有益于协调两位买者之间的差异。

最后,我们可以给出 61.6.3 的最后一点说明的等价
583 说法。价格结构形成中的所有这些反常现象也都与这样一个事实一致:我们正在考虑的市场是一个垄断或双头垄断市场。

64. 一般市场

64.1　问题描述

64.1.1　迄今为止,我们曾经考虑的市场是受到十分严厉限制的市场:其中有两个或三个参与者。下面,我们向前迈出一步,考虑一个一般的市场,它由 $l+m$ 个参与者:l 个卖者,m 个买者。当然,这仍然不是最一般的情况:撇开其他不说,最一般的情况允许每一位参与者能够选择买还是卖;或者,他可以同时是一种物品的卖者和另一种物品的买者。然而,在这一研究中,我们将满足于 l 个卖者和 m 个买者的情况。

另外,我们只打算考虑一种物品,其供给量是 s 个单位。

为了方便,我们用 $1,\cdots,l$ 记这些卖者,他们的集合记为

$$L=(1,\cdots,l);$$

用 $1^*,\cdots,m^*$ 记买者,他们的集合记为

$$M=(1^*,\cdots,m^*);$$

而且,全部参与者的集合记为

$$I=L\cup M=(1,\cdots,l,1^*,\cdots,m^*)。$$①

① 我们宁愿使用这个记号,而不使用传统记号 $1,\cdots,l,l+1,\cdots,l+m$。——583,①

第 i 个卖者最初拥有的物品单位数记为 s_i。这样，

(64:1) $$\sum_{i=1}^{l} s_i = s\text{。}$$

用 u_t^i 记 $t(=0,1,\cdots,s_i)$ 个单位的物品对于卖者 i 来说的效用，$v_t^{j^*}$ 记 $t(=0,1,\cdots,s)$ 个单位的物品对于买者 j^* 来说的效用。因此，数量

(64:2) $$u_0^i=0,u_1^i,\cdots,u_{s_i}^i \quad (i=1,\cdots,l),$$

(64:3) $$u_0^{j^*}=0,v_1^{j^*},\cdots,v_s^{j^*} \quad (j=1^*,\cdots,m^*),$$

描述这些单位的物品对于每一位参与者来说的可变效用。

像前面那样，我们取每位买者的初始状态为其零效用。

如 61.5.2、61.5.3、62.1.2 和 63.2.1 中那样，我们不必重复 61.2.2、61.3.1 和 61.3.2 有关当前这一结构的博弈规则的分析。

584 **64.1.2** 这一博弈的特征函数的确定是容易的：

显然，$S\subseteq I=L\cup M$。我们依次考虑三种可能情况。

第一：$S\subseteq L$。在这种情况下，S 中只有卖者，他们中间达不成任何交易。你可以直接看出，$\mathrm{v}(S)$ 只不过描述其初始状态：

(64:4) $$\mathrm{v}(S)=\sum_{i\text{属于}S} u_{s_i}^i$$

第二：$S\subseteq M$。在这种情况下，S 中只有买者，他们之间也达不成任何交易。你同样能够直接看出，$\mathrm{v}(S)$ 不过描述其初始状态：

(64:5) $$\mathrm{v}(S)=0\text{。}$$

第三：$S\subseteq L$ 和 $S\subseteq M$ 都不成立，即 S 中既有 L 的元素，也有 M 中的元素。在这种情况下，S 包含有卖者，也包含有买者，从而他们之间的交易是肯定可能的。以此为基

础，我们有下述公式：

(64:6)

$$v(S) = \underset{\substack{t_i = 0,1,\cdots,s_i (i \text{属于} S \cap L) \\ r_{j^*} = 0,1,\cdots,s_i (j^* \text{属于} S \cap M) \\ \sum_{i \text{属于} S \cap L} t_i + \sum_{j^* \text{属于} S \cap M} r_{j^*} = \sum_{i \text{属于} S \cap L} s_i}}{\text{Max}} \left(\sum_{i \text{属于} S \cap L} u^i_{t_i} + \sum_{j^* \text{属于} S \cap M} v^j_{r_{j^*}} \right)$$

在这一表达式中，$S \cap L$ 是属于 S 的卖者组成的集合；$S \cap M$ 是属于 S 的买者组成的集合；t_i（i 属于 $S \cap L$）是从卖者 i 转移出去的单位数；r_{j^*} 是转移给买者 j^*（属于 $S \cap M$）的单位数。[①] 我们请读者验证这些并不困难的公式。

64.2 一些特殊性质：垄断和买方垄断

64.2.1 我们没有能力详尽无遗地讨论这一博弈——l 个买者和 m 个买者的市场——的理论。我们现在有的只是关于一些特例的零碎信息和关于更加广泛的领域的几个猜想。这里出现的问题，除了其在经济学中的重要性之外，似乎还有着数学意义。然而，讨论这个题目时机尚不成熟，我们需要进一步的了解。

从(64:4)和(64:5)这两个较简单的方程中，我们能够得出一些直接的结论。这些结论是：

(64:A)　$S \subseteq L$ 和 $S \subseteq M$ 都是平集。

证明：这意味着， 585

$$v(S) = \sum_{k \text{属于} S} v[(k)], S \subseteq L \text{ 或 } S \subseteq M。$$

---

① 这里，没有必要指明从一位卖者向每一位买者转移的单位数：只有效用才进入 v(S)，不受此影响。

个人之间的谈判、联盟和补偿等必须在我们的理论的应用中自动地受到考虑。——584，①

这是(64:4)和(64:5)的直接结论。

(64:B) 该博弈是常数和博弈的充分必要条件是,它是一个非本质博弈。

证明:充分性:非本质性显然意味着常数和。

必要性:假设该博弈是一个常数和博弈。

由于 L、M 互为补集,那么,

$$\text{(64:7)} \qquad \mathrm{v}(I)=\mathrm{v}(L)+\mathrm{v}(M)。$$

由(64:A)($S=L,M$),

$$\text{(64:8)} \qquad \mathrm{v}(L)=\sum_{k\text{属于}L}\mathrm{v}[(k)],\mathrm{v}(M)=\sum_{k\text{属于}M}\mathrm{v}[(k)]。$$

结合(64:7)和(64:8),我们有

$$\text{(64:9)} \qquad \mathrm{v}(I)=\sum_{k\text{属于}I}\mathrm{v}[(k)]。$$

现在,根据59.3.1和27.4中(27:B)的修改适用于我们这里的情况,它恰好使(64:9)成为非本质性的一个准则。

值得注意的是,当借助(64:4)—(64:6)明确说明时,非本质博弈的准则(64:9)变成:(64:6)中的最大值等于 $\sum_{i\text{属于}L}u^i_{t_i}$。这是(64:6)中最大化的式子在 $t_i=s_i,r_{j^\cdot}$ 时的值。所以,这一说法变成了,(64:6)中的最大值发生在 $t_i=s_i$,$r_{j^\cdot}=0$,即不发生交易时。

因此,(64:B)也能够被表述为:

(64:B*) 卖者和买者的个人效用是任何交易都不发生时的效用——(64:6)中的最大值发生在 $t_i=s_i,r_{j^\cdot}=0$——这一事实等价于:该博弈是一个常数和博弈;或者说,(在这种情况下)它是非本质博弈。

这一结果的一个显著特点是,我们这一代表着一个市

场的博弈惟有在市场价格绝对无效的情况下才是常数和博弈。因此，这一问题内在地属于非常数和博弈。

64.2.2 我们换个方向继续下去。

(64:C)　　考虑两个分配，

$$\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l, \alpha_{1^*}, \cdots, \alpha_{m^*}\}\},$$

$$\vec{\beta} = \{\{\beta_1, \cdots, \beta_l, \beta_{1^*}, \cdots, \beta_{m^*}\}\}。$$

假设 586

$$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta},$$

S 是这一占优的 30.1.1 的集合。那么，$S \cap L$ 和 $S \cap M$ 都不会是空集。①

证明：不然的话，我们应该有 $S \subseteq M$ 或 $S \subseteq L$。所以，根据(64:A)，S 是平集，从而是肯定不必要集(见 59.3.2)。

我们从(64:C)得出结论：在这种情况下，

(64:10)　$\alpha_i > \beta_i$　至少对于 L 中的一个 i 成立，

(64:11)　$\alpha_{j^*} > \beta_{j^*}$　至少对于 M 中的一个 j^* 成立。

当 L 或 M 是一个一元集(即 $l = 1$ 或 $m = 1$)时，公式(64:10)和(64:11)有一个有某些意义的功能。这意味着，恰好存在着一个卖者或恰好一个买者，即垄断或买方垄断。

在这些情况下，(64:10)的 i 或(64:11)的 j^* 是惟一地确定的：$i = 1$ 或 $j^* = 1^*$。所以，我们有：

(64:D)　　$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 意味着

(64:12)　　当 $l = 1$ 时，$\alpha_1 > \beta_1$，

(64:13)　　当 $M = 1$ 时，$\alpha_{1^*} > \beta_{1^*}$。

---

① S 必须同时包含买者和卖者。——586，①

引人注目的是,(64:12)和(64:13)是具有可递性的关系,而占优 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 则不具有可递性。当然,其中并不存在矛盾,因为(64:12)或(64:13)只不过是 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 的必要条件。但是,在一个具体的博弈中,这毕竟是第一次占优如此密切地联系着一个具有可递性的关系。

这一联系似乎是垄断(或买方垄断)情况的一个相当基本的特征。① 这一联系将在65.9.1中发挥一定作用。

① (64:12)和(64:13)的文字解释简单明了:没有垄断(或买方垄断),不可能有有效的占优关系。——586,②

第 12 章　占优与解的概念扩展

65. 扩展:特殊情况

65.1 问题描述

65.1.1 n 人博弈的数学分析是从 30.1.1 的定义开始的,其中使用了占优和解的概念,当时,这些概念都是毫不含糊地建立起来的。然而,在理论的随后发展中,多次出现了这样的情况,其中,这些概念被修改。这样的情况有三类: 587

第一:在我们严格地以最初的定义为基础的数学演绎过程中,出现了与(分配、占优、解的)最初概念类似但又不完全相同的重要概念。在这种情况下,为了方便,我们给予了它们那些名称,但同时又有必要牢记它们的不同之处。这类例子见 47.3—47.7 中关于有剩余的本质三人博弈研究,其中关于基本三角形的讨论被简化成了其内部更小的三角形的讨论。另一个例子见 55.2—55.11 中关于一个特殊的简单 n 人博弈的研究,其中关于最初的定义域

的讨论被简化成了 $\mathscr{A}$ 中 V′的定义域的讨论（见 55.8.2—55.8.3 的分析）。

第二：在第 9 章（44.4.2—44.7.4）关于可分解性的分析中，我们明确地重新定义（推广）了分配、占优和解的概念。这对应着我们的理论从零和博弈向常数和博弈的扩展。从那以后，我们一直强调，我们在研究一个新的理论，它类似于但又不完全等同于 30.1.1 的理论。

实际上，这两类不同形式的概念并非有本质不同：第二类能够被归于第一类。事实上，我们引入新理论为的是更有效地处理最初理论的分解问题。在对这一推广进行试探性分析时，我们一直强调这一动机。在 46.10的嵌入分析中，尤其在（46:K）和（46:L）中，我们严格证明了，恰好在这个意义上，新理论能够被归属于最初的理论。

第三：在第 11 章中，分配、占优和解的概念再次得到
588 推广，尤其在 56.8、56.11 和 56.12 中。这对应着该理论向一般博弈的最终扩展。我们再次强调，从那里开始，我们研究的是一个类似于但又不同于旧理论的理论。

然而，这一推广与此前的两个理论有本质不同：它代表着该理论概念上的真正拓展，而不只是技术上的方便。

65.1.2 纵观上述变化，毫无疑问，分配、占优和解的概念变化了（尤其考虑到它们的扩展），但它们之间的联系却没有变化。为了对这些变化——以及此后其他类似变化——有个一般的认识，我们必须找到这一保持不变的联系的一个严格阐述。做到了这一点，我们就能够允许各个方面的完全一般性，并以此为基础重新阐述我们的

理论。

回忆 65.1.1 中列举的例子，呈现在我们面前的是，这一不变的联系是一个过程，通过这个过程，解的概念是从分配和占优的概念推导出来的。这是 30.1.1 中的条件(30:5:c)[或与之等价的(30:5:a)和(30:5:b)]。因此，如果我们释放分配和占优受到的所有约束，但是仍以上述方式定义解，那么，我们就做到了完全一般性。

按照这一方案，我们的做法是：

暂且不考虑分配，我们考虑一个随意给定的域(集合)D。

暂且不考虑占优，我们考虑 D 的元素 x、y 之间的一个任意给定的关系 $\mathscr{S}$。①

现在，D 中 $\mathscr{S}$ 的一个解是一个集合 $V \subseteq D$，它满足如下条件：

(65:1)　　V 的元素恰好是 D 的这样一些元素 y，对于不是 V 的元素的 x，$x\mathscr{S}y$ 成立。②

65.2　一般说明

65.2　这些定义提供了上述意义上的一个更为一般的理论基础。

应该注意的是，我们现在的解的概念与 30.3(尤其是 30.3.5)中分析的饱和解之间的关系如同 30.1.1 的最初

---

① $x\mathscr{S}y$ 表达的是，这一关系在特定的元素 x 和 y 之间成立。读者应该回忆 30.3.2 末尾的讨论。——588,①

② 正如我们曾经承诺的那样，这等价于 30.1.1 中的(30:5:c)。——588,②

概念与它之间的关系。尤其是，我们应该把(65:1)与30.3.3中的第四个例子比较，目前的$\mathscr{S}$对应着那里的$\mathscr{R}$的否定。尤其明显的是，在求解的时候，讨论中的关系的不对称性所带来的困难再次出现。也就是说，30.3.6和30.3.7中对这一后果的说明再次适用。

589 我们即将看到，在某些特例中，这些困难是能够解决的。[1]

为了更好地理解整体情况，我们必须讨论关系$x\mathscr{S}y$的某些特殊化。事实上，在我们接下来的讨论中，$\mathscr{S}$完全不受限制，而且在关系$\mathscr{S}$保持这一一般性的情况下，我们不可能指望发现任何特别深入的结果。另一方面，如30.1.1中定义的那样，解的最初概念保留着关系$\mathscr{S}$的最重要应用，而且要发现这一特殊关系的任何简单特性显得十分困难。因此，不存在引入特殊化的明显办法，无论我们多么渴望这样做。

不过，我们将讨论把关系$x\mathscr{S}y$具体化的三个常用方案，并最终找出在特定有限程度上适用于我们的问题的第四个方案。为此，我们需要做一些数学上的准备。

65.3 排序、可递性和非周期性

65.3.1 我们首先考虑(有着定义域D的)关系$x\mathscr{S}y$与“更大”和“更小”的概念相同的基本特点。这一排序已经在数学文献中得到详细和认真的分析，而且它有如下公

① 见65.4和65.5的结果，以及65.6—65.7的不那么明显的结果。——589，①

认的性质：

(65:A:a)　　对于 D 的任意两个元素 x、y，下述三个关系中有且仅有一个成立：

$$x=y,\ x\mathscr{S}y,\ y\mathscr{S}x。$$

(65:A:b)　　$x\mathscr{S}y$，$y\mathscr{S}z$ 合起来意味着 $x\mathscr{S}z$。[①]

我们把具有这些性质的一个关系称为 D 的一个**完备排序**。一个容易想到并符合普通直觉的完备排序的例子是：对于全部实数或它的任何一部分组成的集合[②]来说，"更大"这一常见概念。再有，同样条件下，"更小"的概念。甚至平面的点也具有完备排序，例如：$x\mathscr{S}y$ 意味着，x 必须比 y 有更大或相同的纵坐标，但那样的话，x 必须比 y 有更大的横坐标。[③]

65.3.2　完备排序的概念能够被大幅度弱化，以至一个有意义的概念仍然存在。这在数学文献中也受到了关注[④]且在效用理论中有重要性。它得自弱化(65:A:a)，但(65:A:b)保留不变。也就是说： 590

(65:B:a)　　对于 D 中任意两个元素 x、y，下列三个关系中至多有一个成立：

$$x=y,\ x\mathscr{S}y,\ y\mathscr{S}x。$$

(65:B:b)　　$x\mathscr{S}y$，$y\mathscr{S}z$ 合起来意味着 $x\mathscr{S}z$。

---

① 用普通的"更大"这一关系替换(65:A:a)和(65:A:b)中的 $x\mathscr{S}y$，你可以验证，这些的确是"更大"这一关系的基本性质。——589，②

② 例如，正整数或一个区间等。——589，③

③ 没有最后这个条件，我们的 $\mathscr{S}$ 是下一节讨论的关系。——589，④

④ 见伯克霍夫：《格理论》，同上，第 1 章。在这本书中，排序、半排序和类似课题得到了现代数学讨论。其中给出了大量文献。——589，⑤

我们把有这些性质的一个关系 $\mathscr{S}$ 称为 D 的一个半排序。[1]（由于这一排序是一个半排序，）(65:B:a) 中列举的三个关系都不成立的 D 的 x、y 被称为 $\mathscr{S}$ 不可比较的。

半排序的例子也容易给出：平面内的点，$x\mathscr{S}y$ 意味着，x 的纵坐标大于 y 的纵坐标（见第 589 页脚注④）。我们还可以定义：$x\mathscr{S}y$ 意味着，x 的纵坐标和横坐标都大于 y 的相应坐标。[2] 另一个很好的例子来自正整数域，$x\mathscr{S}y$ 意味着，x 能够被不等于它的 y 整除。

65.3.3 前述两个排序概念保持了 (65:A:b) 不变而把 (65:A:a) 修改（弱化）成了 (65:B:a)。这强调了 (65:A:b)——即可递性——的重要性。[3] 现在，我们要进一步弱化 (65:B:a) 和 (65:A:b) 的组合，使得 (65:A:b) 仍然基本上不受影响。

首先，(65:B:a) 等价于下面两个条件：

(65:C:a) $x\mathscr{S}x$ 永不成立。

(65:C:b) $x\mathscr{S}y$ 和 $y\mathscr{S}x$ 不可能同时成立。

事实上，(65:B:a) 排除了如下三个组合：$x=y, x\mathscr{S}y$；$x=y, y\mathscr{S}x$；$x\mathscr{S}y, y\mathscr{S}x$。第一个和第二个只不过是 (65:C:a) 的两种写法，而第三个恰好是 (65:C:b)。

---

① 注意，我们在中性意义上使用“半”这个词，即一个完备排序是一个半排序的一个特例，因为 (65:A:a) 隐含着 (65:B:a)。——590，①

② 注意，这接近于 3.7.2 最后一点说明意义上的半排序效用。每一想像到的事件都可能受到两个数字特征的影响，其中每一个都必须增加以产生一个清楚和可再现的偏好。——590，②

③ 一些根本不具有排序本质的其他关系也具有这一性质，如相等，$x=y$。——590，③

下面，我们要证明的是：

(65:D)　　考虑如下断言：

(A_m)永远没有 $x_1 \mathscr{S} x_0, x_2 \mathscr{S} x_1, \cdots, x_m \mathscr{S} x_{m-1}$，其中，$x_0 = x_m$ 且 $x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}$ 属于 D。

那么，我们有：

(65:D:a)　　(65:B:a)等价于(A_1)和(A_2)的结合。

(65:D:b)　　(65:B:a)和(65:A:b)合起来意味着全部(A_1)，(A_2)，(A_3)，…

证明：(65:D:a)的证明：显然，(A_1)是(65:C:a)且(A_2)是(65:C:b)。

以相反的顺序写(A_m)的关系并应用(65:A:b) $m-1$次，这给出了 $x_m \mathscr{S} x_0$。由于 $x_m = x_0$，这意味 $x_0 \mathscr{S} x_0$ 与(65:B:a)矛盾。

这个结果暗示我们考虑全部条件(A_1)，(A_2)，(A_3)，… 591 的总和。它们隐含在(65:B:a)和(65:A:b)——半排序——之中，而且，如即将出现的那样，它代表着这一性质的进一步弱化。

相应地，我们定义：

(65:D:c)　　关系 $\mathscr{S}$ 满足全部条件(A_1)，(A_2)，(A_3)，…，那么，它是非周期的。

读者将会理解为什么我们称其为非周期性：如果(A_m)中的任何一个不成立，就会出现一个关系链：

$$x_1 \mathscr{S} x_0, x_2 \mathscr{S} x_1, \cdots, x_m \mathscr{S} x_{m-1},$$

它是一个圆环，因为它的最后一个元素 x_m 等于其第一个元素 x_0。

我们已经说明了，非周期性隐含在半排序之中[这当

然是(65:D:b)的内容],从而更隐含在完备排序之中。有待证明的是,它实际上是一个较半排序更为宽泛的概念,也就是说,一个关系能够是一个非周期的关系,而不是一个(完备或半)排序。

下面是这一现象的两个例子:令 D 是全部正整数的集合,$x\mathscr{S}y$ 是直接递推后继关系,即 $x=y+1$。或者,令 D 是全部实数集,且 $x\mathscr{S}y$ 意味着 x 比 y 更大但又大得不太多,如不超过 1,即 $y+1\geqq x>y$。

最后,我们还想说的一点是,完备和半排序的例子以及非周期关系的例子能够轻易增加。篇幅不允许我们这么做,但作为练习,我们建议读者这么做。第 62 页脚注①和第 589 页脚注⑤中的参考文献都是有益的。

65.4 对称关系和完备排序的解

65.4.1 下面,让我们讨论 65.2 末尾提到的特殊方案。

首先:在 30.3.2 意义上说,$\mathscr{S}$是对称的。在这种情况下,恰当的做法是回到 65.2 开头提到的与饱和的联系。由 $\mathscr{S}$ 的对称性,它将提供我们渴望中的解的全部信息。

第二:$\mathscr{S}$是一个完备排序。在这种情况下,如通常那样,我们定义:如果不存在满足 $y\mathscr{S}x$ 的 y,我们称 x 是 D 的最大值。(见接下来的说明。)显然,D 要么没有最大值,要么恰好有一个最大值。①

---

① 证明:如果 x、y 都是 D 的最大值,那么,$y\mathscr{S}x$ 和 $x\mathscr{S}y$ 都被排除,(65:A:a)必然要求 $x=y$。——591,①

我们有：

(65:E)　　V 是一个解，当且仅当它是一个一元集，其惟一元素是 D 的最大值。

证明：必要性：令 V 是一个解。由于 D 不是空集，V 也不是空集。 592

考虑 V 中的一个 y。如果 $x\mathscr{S}y$，那么，x 不可能属于 V，因此 V 中有一个 u 满足 $u\mathscr{S}x$。可递性给出 $u\mathscr{S}y$。但是，这是不可能的，因为 u、y 都属于 V。所以，(D! 中)不存在满足 $x\mathscr{S}y$ 的 x①，而且，y 必定是 D 的最大值。

所以，D 有一个最大值，它必定是惟一的(见上)。因此，V 是一个一元集，由这个最大值组成。

充分性：令 x_0 是 D 的最大值，$V=(x_0)$。给定(D! 的)一个 y，V 中不存在使 $x\mathscr{S}y$ 成立的 x 等于 $x_0\mathscr{S}y$ 的否定。因为 $y\mathscr{S}x_0$ 被排除了，这一否定等价于 $y=x_0$。所以，这些 y 形成集合 V。故，V 是一个解。

65.4.2 因此，如果 D 没有最大值，那么，不存在解 V；如果 D 有一个最大值，那么，存在一个解。

如果 D 是有限的，那么，情况肯定是后者。这在直觉上是显而易见的，且容易证明。为了完美，也为了与接下来的说明一致，我们还是要给出全部证明：

(65:F)　　如果 D 是有限的，那么，它有一个最大值。

证明：假设 D 没有最大值。选择 D 中任一 x_1，那么，有一个 x_2 满足 $x_2\mathscr{S}x_1$，那么，有一个 x_3 满足 $x_3\mathscr{S}x_2$ 等等。根据(65:A:b)，对于 $m>n$，$x_m\mathscr{S}x_n$，所以，根据(65:A:a)，

---

① 4.6.2 中讨论过类似情况。——592，①

$x_m \neq x_n$。也就是说，$x_1, x_2, x_3, \cdots$ 全部相互不同，从而 D 是一个无穷集。

这些结果表明，V 的存在性和惟一性对应着 D 的存在性和惟一性。

65.5 半排序的解

65.5.1 第三：$\mathscr{S}$是一个半排序。在这种情况下，我们把 D 的最大值的定义从上面的说明一字不漏地照搬过来。有时，一个方面的做法是，通过将其称为 D 的一个相对最大值来指明与一个半排序的联系。（见前面的说明中的相应地方。这一对比是相当有用的，尽管有下面的脚注②。）D 也许没有最大值，它可能有一个最大值，也可能有若干个最大值。[①] 因此，相对最大值未必惟一，而绝对最大值是惟一的。[②]

593 与绝对最大值相比，相对最大值的存在性问题也有着不同的作用。一个重要的性质是：

(65:G) 如果 D 中的 y 是一个最大值，那么，满足 $x\mathscr{S}y$ 的一个最大值 x 存在。

对于绝对最大值来说，即如果 $\mathscr{S}$是一个完备排序，

---

① 第591页脚注①的论述不再成立，因为它依赖于(65:A:a)，而后者现在被弱化为(65:B:a)。

例如，取 D 为平面内的单位正方形，按照65.3.2末尾前两个例子中的方法之一，在 D 内定义一个半排序。这样，D 的最大值点分别组成其整个上边，或上边与右边合在一起。——592，②

② 需要提醒的一点是，不要把我们的相对最大值概念与函数理论中的最大值混淆：那里，局部最大值常常被称为相对最大值。由于那里涉及的量是数值量，因而是完备排序的，与我们这里的分析没有任何关系。——592，③

(65:G)恰好表达着一个最大值的存在性。[①] 对于相对最大值来说,情况未必如此,例如,对于一个半排序,某些(相对)最大值的存在性未必意味着(65:G)。这样的例子不难找到,不过,我们不想在这一问题上花费更多篇幅。我们只需说,(65:G)的确是从一个绝对最大值存在的情况向相对最大值情况(见下)的真正扩展(见前面的说明)。

这样,我们有:

(65:H)　　V 是一个解,当且仅当(D 和 $\mathscr{S}$!)满足(65:G)且 V 是全部(相对)最大值组成的集合。

证明:必要性:令 V 是一个解。

如果 y 不属于 V,那么,V 中存在一个 x 满足 $x\mathscr{S}y$,因此 y 不是一个最大值。所以,所有的最大值都属于 V。

如果 y 属于 V,那么,上面的说明中(65:E)的证明中给出的论述能够被一字不漏地照搬过来,说明 y 是一个最大值。

所以 V 恰好是所有最大值的集合。

如果 y 不是一个最大值,即不属于 V,那么,V 中存在一个 x,即一个最大值,满足 $x\mathscr{S}y$,所以(65:G)得到满足,进而令 V 是所有的最大值的集合。

充分性:假设(65:G)得到满足,且令 V 是所有的最大值的集合。

---

① 证明:因为 D 不是空集,(65:G)意味着一个最大值的存在性。

相反:令 x_0 是 D 的最大值。那么,对于每个不是最大值的 y,即 $y \neq x_0$,$y\mathscr{S}x_0$ 的排除和(65:A:a)的成立(完备排序!)给出 $x_0\mathscr{S}y$。——593,①

对于V中的x和y,$x\mathscr{S}y$是不可能的,因为y是一个最大值。如果y不属于V,即不是一个最大值,那么,根据(65:G),存在一个是最大值的x,$x\mathscr{S}y$,即x属于V。所以,根据(65:1),V是一个解。

读者应该验证,当这一排序是完备排序时,结果(65:H)如何特殊化为前述(65:E)。

我们的结果(65:H)表明,如果D和$\mathscr{S}$不满足条件(65:G),解V不存在;当这个条件得到满足时,解存在且惟一。

65.5.2 如果D是有限的,那么,情况肯定是后者。我们对此给出详细证明:

(65:I) 如果是有限的,那么,它满足条件(65:G)。

证明:假设情况相反,即D不满足(65:G)。如果一个y不是一个最大值且不存在使$x\mathscr{S}y$成立的最大值x,那么,我们称y是一个例外。(65:G)不成立就意味着,例外的y存在。

考虑一个例外的y。由于它不是一个最大值,满足$x\mathscr{S}y$的x存在。又由于y是例外,这个x不是一个最大值。

594 如果满足$u\mathscr{S}x$的一个最大值u存在,那么,根据(65:B:b),这会给出$u\mathscr{S}y$,这与y是个例外矛盾。所以,不存在这样的u,即x也是一个例外。即:

(65:J) 如y是例外,那么,存在一个例外x满足$x\mathscr{S}y$。

现在,选择一个例外x_1和一个满足$x_2\mathscr{S}x_1$的例外x_2,一个满足$x_3\mathscr{S}x_2$的例外x_3,如此等等。由(65:B:b),对于$m>n$,$x_m\mathscr{S}x_n$,从而,根据(65:B:a),$x_m\neq x_n$。也就是说,x_1,

$x_2, x_3, \cdots$互补相同且 D 是无穷集。

[见前面的说明(65:F)的证明中。要看到,我们能够用较弱的(65:B:a)替换其(65:A:a)。]

这些结果表明,一个解的存在性并不对应着一个最大值的存在性,而是对应着条件(65:G)。考虑到 65.4.2 中的总结说明,这是一个令人吃惊的结果。它证实了我们较早时的一个结果:在目前的半排序情况下,(65:G)恰当地取代了一个最大值的存在性。

解的惟一性甚至更令人吃惊。根据我们前面的说明的最后一部分,人们自然会假设解的这一惟一性与最大值之间有某种联系。但是,我们现在看到,正如我们已经指出过的那样,解是惟一的,而(相对)最大值未必是惟一的。①

65.6 非周期性和严格非周期性

65.6.1 第四:$\mathscr{S}$是非周期的。我们知道,这种情况是前两种情况的折中,即比前两者都更具一般性。

在那两种情况中,我们确定了一个解存在的充分必要条件,而且我们还发现,当这些条件得到满足时,解是惟一的。[见(65:E)和(65:H)。]另外,我们看到,当 D 是有限集时,这些条件肯定得到满足。[见(65:F)和(65:I)。]

在非周期的情况下,我们将以多种方式发现与此

① (65:H)表明,解 V 并不联系着任何具体(非惟一的)最大值,而是联系着所有的最大值的(惟一)集合。——594,①

类似的条件，而且，在某些方面，我们将获得较以前更深刻的认识。然而，在我们的讨论过程中，略微改变我们的观点是必要的，而且，我们的结果将受到一定限制。一个有限的 D 的情况将再次得到彻底和令人满意的解决。

无论是对于 D 本身来说，还是对于其子集来说，引入最大值概念都有方便之处。[①] 所以，我们定义：如果 x 属于 E 且 E 中不存在满足 $y \mathscr{S} x$ 的 y，我们称 x 是 $E(\subseteq D)$ 的一个**最大值**。我们用 $E^m(\subseteq E)$ 记 E 的所有最大值的集合。

595 我们的讨论将证明，D 是否具有如下性质至关重要：

(65:K) （对于 $E \subseteq D$）$E \neq \ominus$ 意味着 $E^m \neq \ominus$。

也就是说：D 的每个非空子集都有最大值。[②] 表面上看，(65:K)与非周期性没有任何关系，但实际上它们之间存在着密切的联系。要说明这种情况下解的作用，我们要首先研究这一联系。

65.6.2 为此，我们去掉 D 和 $\mathscr{S}$ 受到的所有约束条

---

① 由于我们在第二点说明中使用了“绝对”一词，在第三点说明使用了“相对”一词，我们应该在这里使用一个更弱的词。然而，此种情况下这类术语发明是不必要的。——594，②

② 在集论中，即使 $\mathscr{S}$ 是一个完备排序，性质(65:K)也十分重要。熟悉集论的读者将会看出，(65:K)恰好是良序这一基本概念。（在这种情况下，$\mathscr{S}$ 必须被解释为“据先”而不是“更大”。）见弗兰克尔，第195页和第299页；豪斯多夫，第55页，第61页脚注①；泽米罗，第269页脚注②。令人吃惊的是，这同一性质在使我们的解联系到随意的关系时发挥着作用。本章余下的分析的主要部分是研究这一性质及其结果。

实际上，这个题目及其衍生后果有待从数学的角度做进一步分析。——595，①

件，甚至包括非周期性。

为了方便，我们引入一个性质，它使用65.3.3中(65:D)的一个变形，而且它内在地联系着它们：

(A_∞)　　永远没有 $x_1 \mathscr{S} x_0, x_2 \mathscr{S} x_1, x_3 \mathscr{S} x_2, \cdots$，其中，$x_0, x_1, x_2, \cdots$ 属于 D。①

由于即将给出的理由，我们定义：

如果一个关系 $\mathscr{S}$ 满足条件(A_∞)，我们称其为**严格非周期的**。

下面，我们要用五个引理说明严格非周期性——即(A_∞)——与(65:K)及其与周期性之间的关系。基本结果是(65:O)和(65:P)；(65:L)—(65:N)是为(65:O)做的准备。

(65:L)　　　严格非周期性意味着非周期性。

证明：假设 $\mathscr{S}$ 不是非周期的，那么，D 中存在 $x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}$ 和 $x_m = 0$，使得 $x_1 \mathscr{S} x_0, x_2 \mathscr{S} x_1, \cdots, x_m \mathscr{S} x_{m-1}$。现在，把序列 $x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}, x_m$ 扩展为一个无穷序列 $x_0, x_1, \cdots$，为此，令

$$x_0 = x_m = x_{2m} = \cdots,$$

$$x_1 = x_{m+1} = x_{2m+1} = \cdots,$$

$$\cdots$$

$$x_{m-1} = x_{2m-1} = x_{3m-1} = \cdots。$$

这样，显然有 $x_1 \mathscr{S} x_0, x_2 \mathscr{S} x_1, x_3 \mathscr{S} x_2, \cdots$，从而严格非周期性不成立。

---

① 就指数必定无限走下去的意义上说，序列 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 应该是一个无穷序列，但 x_i 未必总是互不相同。——595，②

(65:M) 无严格非周期性的非周期性意味着:

(B_{∞}^{*}) D 中存在一个序列 $x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots$[①]满足如下性质:

596 对于 $x_p \mathscr{S} x_q$, $p = q + 1$ 是充分条件且 $p > q$ 是必要条件。[②]

(B_{∞}^{*})意味着 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 两两互不相同,从而这种情况下的 D 必定是无穷的。

证明:由于 $\mathscr{S}$ 不是严格非周期的,D 中存在 $x_0, x_1, x_2, \cdots$,使得 $x_1 \mathscr{S} x_0, x_2 \mathscr{S} x_1, x_3 \mathscr{S} x_2, \cdots$。因此,$p = q + 1$ 是 $x_p \mathscr{S} x_q$ 的充分条件。

现在,假设 $x_p \mathscr{S} x_q$。我们希望证明 $p > q$ 的必要性。假设相反的情况:$p \leqq q$。那么,$x_{p+1} \mathscr{S} x_p$, $x_{p+2} \mathscr{S} x_{p+1}$, $\cdots$, $x_q \mathscr{S} x_{q-1}$,[③]$x_p \mathscr{S} x_q$,而且这些关系与(A_m)($m = q - p + 1$)矛盾:用我们的 $x_p, x_{p+1}, \cdots, x_q$ 和 x_p 取代其 $x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}$ 和 $x_m = x_0$ 即可。这与 $\mathscr{S}$ 的非周期性矛盾。

因此,(B_{∞}^{*})的全部得证。

现在,(B_{∞}^{*})的结果:如果 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 不是两两互不相同的,那么,$x_p = x_q$ 就会对于某个 $p > q$ 发生。由(B_{∞}^{*}),则 $x_{q+1} \mathscr{S} x_p$;由(B_{∞}^{*}),这意味着 $q + 1 > p$,即 $q \geqq p$。所以,$x_0, x_1, x_2, \cdots$ 是两两互不相同的,从而 D 必定是无穷集。

(65:N) 无非周期性意味着:

对于某个 $m(=1,2,\cdots)$,我们有:

---

① 见上面的脚注②和这一引理的最后一部分。——595,③

② 有关这一结果,也可参见 65.8.3。——596,①

③ 这些恰好是 $q - p$ 个关系,如果 $p = q$,那么,它们就不出现。——596,②

(B_m^*)　D 中存在 $x_0,x_1,\cdots,x_{m-1}$ 和 $x_m=x_0$ 满足如下性质：

对于 $x_p\mathscr{S}x_q$，$p=q+1$ 是充分必要条件。①

证明：由于 $\mathscr{S}$ 不是非周期的，D 中存在 $x_0,x_1,\cdots,x_{m-1}$ 和 $x_m=x_0$，使得 $x_1\mathscr{S}x_0,x_2\mathscr{S}x_1,\cdots,x_m\mathscr{S}x_{m-1}$。选择这样一个系，其 $m(=1,2,\cdots)$ 尽可能小。

显然，$p=q+1$ 是 $x_p\mathscr{S}x_q$ 的充分条件。我们要证明的是，它也是必要的。因此，假设 $x_p\mathscr{S}x_q$ 但 $p\neq q+1$。

现在，$x_0,x_1,\cdots,x_{m-1},x_m=x_0$ 的周期性的重新排列不影响它们的性质，而且我们能够以这种办法使 x_p 是最后一个元素，即按 p 变成 m。也就是说，假设 $p=m$ 并不失一般性。现在，$p\neq q+1$，即 $q\neq m-1$。我们还能够假设 $q\neq m$，因为 $q=m$ 能够被 $q=0$ 取代。所以，$q\leqq m-2$。有了这些准备，我们能够用 $x_0,x_1,\cdots,x_q,x_m$ 替换 $x_0,x_1,\cdots,x_{m-1},x_m=x_0$② 而不影响其性质。这就用小于 m 的 $q+1$ 取代了 m，这与 m 是最小值的假设矛盾。

故，(B_m^*) 全部得证。

65.6.3　总之：

(65:O)

(65:O:a)　非周期性等价于 (B_1^*)，(B_2^*)，…全部被否定。

(65:O:b)　严格周期性等价于全部 (B_1^*)，(B_2^*)，…　597

① 注意，$x_0,x_1,x_2,\cdots$ 的互相关联性在 (B_m^*) 中是完备的，但其在 (B_m^*) 中不完备。这一点在后面是重要的。——596，③

② 即略去 $x_{q+1},\cdots,x_{m-1}$。——596，④

和(B^*_∞)被否定。

(65:O:c)　　严格非周期性意味着对于所有的 D 的非周期性,但是,对于有限集 D 来说,两者等价。

证明:(65:O:a)的证明:这个条件是必要条件,因为(B^*_∞)与(A_∞)矛盾,从而有非周期性。由(65:N),该条件也是充分条件。

(65:O:b)的证明:这个条件是必要条件,因为,根据(65:L),缺乏非周期性与严格非周期性矛盾,且(B^*_∞)与(A_∞)矛盾,从而有严格非周期性。这个条件是充分条件,因为严格非周期性的否定允许(65:M)在非周期情况下的应用,以及(65:O:a)在没有非周期性情况下的应用。

(65:O:c)的证明:充分性来自(65:L)。如果 D 是有限的,那么,必要性——从而等价性——是(65:M)中最后一点说明的结果。

最后,我们建立与(65:K)的联系:

(65:P)　　(65:K)等价于严格非周期性。

证明:必要性:假设 $\mathscr{S}$ 是不严格的非周期关系。在 D 中选择 $x_0,x_1,x_2,\cdots$ 满足 $x_1\mathscr{S}x_0,x_2\mathscr{S}x_1,x_3\mathscr{S}x_2,\cdots$。那么,$E=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\subseteq D$ 且 $\neq\ominus$,而且它显然没有最大值。所以,(65:K)不成立。

充分性:假设(65:K)不成立。选择一个非空的 $E\subseteq D$,它没有最大值。[1] 在 E 中选择一个 x_0,x_0 不是 E 的最大

---

① 读者应该将这里的证明与65.4.2中(65:F)的证明进行比较。——597,①

值点，所以，选择 E 中的 x_1，使 $x_1 \mathscr{S} x_0$。x_1 也不是 E 的最大值点，所以，在 E 中选择一个 x_2，使 $x_2 \mathscr{S} x_1$。如此进行下去。以这种方式，我们得到了 E 中，从而在 D 中的一个序列 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 且 $x_1 \mathscr{S} x_0, x_2 \mathscr{S} x_1, x_3 \mathscr{S} x_2, \cdots$。这与严格周期性矛盾。

所以，我们看到：严格周期性恰好等价于(65:K)，而在我们看来，后者是一个基本的条件。非周期性和严格非周期性之间有着密切联系。有限集 D 的特殊作用就使我们感受到这种联系：对于有限集 D 来说，上述两个概念等价。

65.7 对于一个非周期关系来说的解

65.7.1 现在，我们转向我们的主要目标：D 中 $\mathscr{S}$ 的解的研究。正是在这里，我们赋予(65:K)的基本重要性得到体现：(65:K)密切联系着惟一一个解的存在性。

首先，我们证明，如果(65:K)得到满足，那么，(D 中)恰好存在($\mathscr{S}$ 的)一个解。在这一证明中，我们将我们自己限制于有限集 D，在这种情况下，解甚至能够通过一个明确的构造过程来得到。这一过程借助有限归纳法来实现。D 的有限性并非真的必要，但一个无穷的 D 会使我们的过程较为复杂。①

因为我们必须假设(65:K)，根据(65:P)，这意味着，D 必定是严格非周期的。由于 D 是有限的，根据(65:O:c)， 598

① 要用到较为高级的集合论概念(见第269页脚注②和第595页脚注①的参考书目)，尤其是超限归纳法或某些等价技术。——597，②

这与普通的非周期性没什么不同。所以,暂时地,无所谓我们说我们需要 D 的非周期性还是其严格非周期性。不过,应该牢记的一点是,我们正在使用(65:K),即严格周期性,而且,使讨论中的差异消失的有限性假设能够被去掉。

我们重复一下:在接下来讨论中,我们假设 D 的有限性和性质(65:K)——非周期性,即严格非周期性。

下面,让我们完成上面提到的归纳过程。我们首先完成归纳,上面指出过的性质将在后面证明。

对于每个 $i=1,2,3,\cdots$,我们定义三个集合 A_i、B_i 和 C_i(它们都$\subseteq D$):$A_1=D$。对于一个 $i(=1,2,\cdots)$,如果 A_i 已知,那么,B_i、C_i 和 A_{i+1} 以下述方式得到:$B_i=A_i^m$,即 B_i^m 是 A_i 中这样一些 y 的集合,A_i 中不存在使 $x\mathscr{S}y$ 的 x。C_i 是 A_i 中这样一些 y 的集合,对于 B_i 中某个 x,$x\mathscr{S}y$ 成立。最后,$A_{i+1}=A_i-B_i-C_i$。

我们要证明的是:

(65:Q) B_i,C_i 不相交。

证明:这是它们的定义的直接结果。

(65:R) $A_i\neq\ominus$ 意味着 $A_{i+1}\subset A_i$。①

证明:根据(65:K),$A_i\neq\ominus$ 意味着 $B_i=A_i^m\neq\ominus$②,因此,

$$A_{i+1}=A_i-B_i-C_i\subset A_i。$$

(65:S) 存在一个 i 满足 $A_i=\ominus$。

证明:不然的话,由(65:R),$D=A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$,这与 D 的有限性矛盾。

---

① 关键是,我们有$\subset$,而不仅仅有$\subseteq$! ——598,①

② 这是我们用到(65:K)的惟一而关键之处。——598,②

(65:T)　　令 i_0 是(65:S)中最小的 i,那么,

$$D = A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_{i_0-1} \supset A_{i_0} = \ominus。$$

证明:这是(65:R)和(65:S)的重述。

(65:U)　　$B_1, \cdots, B_{i_0-1}, C_1, \cdots, C_{i_0-1}$ 是不相交的集合,它们的并集是 D。

证明:由 A_{i+1} 的定义,我们有 $B_i \cup C_i = A_i - A_{i+1}$。因此,$B_1 \cup C_1, \cdots, B_{i_0-1} \cup C_{i_0-1}$ 是两两互不相交的且它们的并集是

$$A_1 - A_{i_0} = D - \ominus = D。$$

将这与(65:Q)结合起来表明,$B_1, C_1, \cdots, B_{i_0-1}, C_{i_0-1}$,即 $B_1, \cdots,$ 599
$B_{i_0-1}, C_1, \cdots, C_{i_0-1}$ 两两互不相交,且它们的并集也是 D。

65.7.2　现在,我们令

(65:2)　　$V_0 = B_1 \cup \cdots \cup B_{i_0-1}$。

那么,(65:U)给出

(65:3)　　$D - V_0 = C_1 \cup \cdots \cup C_{i_0-1}$。

下面,我们证明:

(65:V)　　如果 V 是(D 中 $\mathscr{S}$ 的)一个解,那么,$V = V_0$。

证明:首先,我们证明:对于所有的 $i = 1, \cdots, i_0 - 1$,$B_i \subseteq V$。

假设结论不成立且考虑 $B_i \subseteq V$ 不成立的最小的 i。令 z 是这个 B_i 的不属于 V 的一个元素,那么,对于 V 中某个 y,有 $y \mathscr{S} z$。z 是 A_i 中的一个最大值,从而 y 不属于 A_i。考虑 y 不属于 A_k 的最小 k,那么,$k \leqq i$ 且 y 属于 $D = A_1$,所以 $k \neq 1$。令 $j = k - 1$,那么,$1 \leqq j < i$。y 属于 A_j 但不属于 $A_{j+1} = A_k$,从而它属于 $B_j \cup C_j = A_j - A_{j+1}$。

z 属于 $B_i \subseteq A_i \subset A_j$。假如 y 属于 B_j,那么,$y \mathscr{S} z$ 就会意

味着 z 属于 C_j。这是不可能的，因为 z 属于 B_i。所以，y 属于 C_j。

现在，B_j 中必然存在一个满足 $x \mathscr{S} y$ 的 x。因为 y 属于 V，这把 x 从 V 中排除了。因此，$B_j \subseteq V$ 不可能成立。由于 $j < i$，这与假设中的 i 的最小性矛盾。

这样，我们看到：

(65:4) $\qquad B_i \subseteq V, \quad i = 1, \cdots, i_0 - 1$。

如果 y 属于 C_i，那么，B_i 中存在一个满足 $x \mathscr{S} y$ 的 x。根据(65:4)，这个 x 属于 V，所以 y 不可能属于 V。

这样，我们看到：

(65:5) $\qquad C_i \subseteq -V, \quad i = 1, \cdots, i_0 - 1$。

(65:4)、(65:5)和(65:2)、(65:3)的比较表明，V 必定与 V_0 相同。

(65:W) $\qquad V_0$ 是(D 中 $\mathscr{S}$ 的)一个解。

证明：我们分两步完成这个证明：

如果 x、y 属于 V_0，那么，$x \mathscr{S} y$ 被排除了：假设结论相反：x，y 属于 V_0，$x \mathscr{S} y$。

x、y 属于 V_0，如 x 属于 B_i 且 y 属于 B_j。如果 $i \leq j$，那么，y 属于 $B_j \subseteq A_j \subseteq A_i$。$x$ 属于 B_i，所以 $x \mathscr{S} y$ 意味着 y 属于 C_i。这是不可能的，因为 y 属于 B_j。如果 $i > j$，那么，x 属于 $B_i \subseteq A_i \subset A_j$。$y$ 是 A_j 中的一个最大值，所以 $x \mathscr{S} y$ 是不可能的。

因此，无论何种情况，我们总有一个矛盾。

600 如果 y 不属于 V_0，那么，对于 V_0 中某个 x，$x \mathscr{S} y$：y 属于 $-V_0$，从而属于某个 C_i。所以，对于 B_i 中某个 x，$x \mathscr{S} y$，而且这个 x 属于 V_0。

这就完成了整个证明。

结合(65:V)和(65:W),我们能够说:

(65:X)　　(D 中 $\mathscr{S}$的)解存在且惟一。这个解是(65:2)的 V_0。

65.8 解的惟一性、非周期性和严格非周期性

65.8.1 让我们重新考虑最后三点说明,为了避免更多复杂性,我们仍然保留有限性假设。显然,虽然假设不同,它们却都产生相同的结果。在每种情况下,我们证明了一个惟一的解的存在性,但最初的假设是完备排序,然后是半排序,最后是(普通或严格)非周期性——即一步步变弱。

至此,我们自然要问,我们是否已经达到了弱化的极限了呢?或者非周期性是否能够被一个更弱的条件取代而不损害解的惟一性呢?

必须承认,这一研究思路使我们偏离了博弈论。事实上,在这一理论中,解的存在性有着基本的重要性,但是,我们也知道,解的惟一性问题本来并不存在。

不过,由于我们已经有了一些有关惟一存在性的结果,我们将继续研究这种情况。我们将看到,它对于博弈理论有着一定的间接意义。(见第 67 节。)

按照上面描述的轮廓,我们应该问的是:为了存在一个惟一的解,关系 $\mathscr{S}$ 的哪个性质是必要的和充分的?容易看出,这个问题不大可能有一个简单且令人满意的答案。事实上,(D 中 $\mathscr{S}$的)解仅仅揭示 D(和 $\mathscr{S}$)的结构的很少一部分。非周期的情况不适合这种判断,因为它有点

复杂，不过，完备的排序或半排序的情况倒是把要点弄清楚了。在那里，解仅仅联系着 D 的最大值，而且它根本不表达 D 的其他元素的性质是什么？

这一障碍不难排除。考虑一个集合 $E\subseteq D$。D 中的一个关系 $\mathscr{S}$ 也是 E 中的一个关系，而且如果它是 D 中的一个完备排序、半排序或（普通或严格）非周期关系，那么，在 E 中，它也一样。因此，我们的结果（65：X）意味着，在每个 $E\subseteq D$ 中，存在（$\mathscr{S}$ 的）惟一一个解。如果对于所有的 $E\subseteq D$ 构造这些解，那么，关于 D 的结构，这些解告诉我们的要多得多。我们最好把自己限制于（完备或半）排序的情况。显然，对于所有的 $E\subseteq D$，E 的最大值将向我们提供 D（和 $\mathscr{S}$）的结构的十分详细信息。

601 **65.8.2** 因此，我们遇到了这样一个问题：要使对于每个 $E\subseteq D$ 都（在 E 中）存在（$\mathscr{S}$ 的）惟一一个解，关系 $\mathscr{S}$ 的哪个性质是充分必要条件？我们能够证明的是，这里，非周期性和严格非周期性是有意义的概念，虽然这个题目尚未被彻底研究透彻。下面的两个引理包含着我们能够就这个题目说些什么。

（65：Y） 要使对于每个 $E\subseteq D$ 都（在 E 中）存在（$\mathscr{S}$ 的）惟一一个解，严格非周期性是充分条件。

对于有限集 D，这是（65：X）的结果，而且，根据（65：O：c），严格非周期性可以被非周期性取代。

对于无穷集 D，这依赖于（65：X）向无穷集的推广（见 65.7.1 开头）

证明：如果 D 是（普通或严格）非周期的，这样，所有

的 $E\subseteq D$ 也都是如此(见上)。现在,我们引理中的所有断言都变得显而易见了。

(65:Z)　　要使对于每个 $E\subseteq D$ 来说,(E 中)存在($\mathscr{S}$ 的)惟一一个解,非周期性是必要条件。

证明:如果 D 不是非周期的,那么,(65:O:a)给出(65:N)中一个(B_m^*)($m=1,2,\cdots$)成立。构造其 x_0,$x_1,\cdots,x_{m-1}$ 和 $x_m=x_0$ 并令 $E=(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{m-1})$。那么,$E\subseteq D$ 和(B_m^*)完全描述了 E 中的 $\mathscr{S}$。让我们考虑 E 中($\mathscr{S}$ 的)解 V。

考虑这样一个解 V。如果 x_i 属于 V,那么,x_{i+1} 不属于 V,因为 $x_{i+1}\mathscr{S}x_i$。如果 x_i 不属于 V,那么,V 中存在一个 y 满足 $y\mathscr{S}x_i$,即 $y=x_j$,$x_j\mathscr{S}x_i$。这意味着 $j=i+1$①,所以 $y=x_{i+1}$,从而 x_{i+1} 属于 V。这样,我们看到:

(65:6)　　x_i 属于 V 的充分必要条件是 x_{i+1} 不属于它。

重复(65:6)给出:

(65:7)　　如果 k 是偶数,那么,x_0 属于 V 的充分必要条件是 x_k 属于它。

如果 k 是奇数,那么,x_0 属于 V 的充分必要条件是 x_k 不属于它。

由于 $x_0=x_m$,如果 m 是奇数,那么,(65:7)中包括一个矛盾。因此,如果 m 是奇数,E 中不存在($\mathscr{S}$ 的)解。如果 m 是偶数,那么,(65:7)意味着 V 要么是所有的有偶数 k 的 x_k 的集合,要么是有一个奇数 k 的 x_k 的集合。而且,容易验证,这两个集合都是 E 中($\mathscr{S}$)的解。

---

① 如果 $i=m$,那么,用 $i=0$ 替换它。——601,①

所以,我们有:

(65:8)　　视 m 是偶数还是奇数,$E=(x_0,x_1,\cdots,x_{m-1})$中 $\mathscr{S}$ 的[有来自(B^*_m)的 x_0,x_1,x_{m-1}的]解的个数是2或0。

所以,这个 $E(\subseteq D)$中无论如何都不会有惟一解。

结合(65:Y)和(65:Z),我们有:对于有限集来说,对于所有的 $E\subseteq D$,(E 中 $\mathscr{S}$ 的)惟一一个解的存在性完全得
602 到描述:它等价于非周期性,即此种情况下的严格非周期性。对于无穷集 D,我们能够说的仅仅是,非周期性是必要条件且严格非周期性是充分条件。

65.8.3　这种情况中存在的差异只能通过研究非周期而不是严格非周期的(无穷)集 D 及其子集 E 来弥补。(65:O:a)和(65:O:b)的比较告诉我们,这样一个 D 满足(B^*_∞)。构造其 $x_0,x_1,x_2,\cdots$并令 $D^*=(x_0,x_1,x_2,\cdots)$。这也是非周期而不是严格非周期的,因此我们可以研究它以取代 D。

这样,问题变成了:

(65:9)　　假设 $D^*=(x_0,x_1,x_2,\cdots)$满足(B^*_∞),那么,每个 $E\subseteq D^*$ 中都有($\mathscr{S}$ 的)惟一一个解吗?

(65:9)无法直接得到回答,原因在于(B^*_∞)没有完全描述 D^* 中的关系 $x\mathscr{S}y$——即 $x_p\mathscr{S}x_q$。对于(B^*_m)($m=1,2,\cdots$)来说,相应的问题在(65:Z)的证明中得到了否定的回答,但是,(B^*_m)在它的集合中完全描述了关系 $x\mathscr{S}y$——即 $x_p\mathscr{S}x_q$。因此,(65:9)的回答需要详细分析满足(B^*_∞)的关系 $x_p\mathscr{S}x_q$ 的所有可能形式。这一问题似乎是一个相

当困难的问题。①

65.9 应用于博弈:离散性和连续性

65.9.1 正如我们在前面指出过的那样,我们上面关于非周期性和严格非周期性的结果对于博弈理论来说并没有直接的意义。

关于严格非周期性,[根据(65:P)]我们只需强调它等价于(65:K),并牢记在博弈论中 D(所有分配的集合)本身甚至都没有最大值(即不被占优的元素)。②

以本质三人博弈为例,普通非周期性也遭到了破坏。③

不过,存在着这样的情况,它们出现在特定博弈的数学讨论之中,其中,非周期性的概念已经得到运用。这些情况符合 65.1.1 的第一点说明的精神,而且它们尤其属于那里提到的例子。

因此,在 47.5.1 中讨论的三角形 T 中,如图 76 和图 77 所示,我们有一个非周期的占优。④ 另外,在 55.8.2 中描述的集合 $\mathscr{A}$ 中,存在着一个非周期的占优概念,这是(55:Z)弄清楚了的。⑤

最后,在第 64 节中讨论的市场中,正如 64.2.2 末尾,

---

① 它位于组合数学和集合论的交接处,值得进一步研究。——602,①

② 这一点对于所有本质博弈来说都成立。见 31.2.3 中的(31:M)。——602,②

③ 我们请读者以图 54 为例验证这一点。容易断定,(B_m^*)对于所有的 $m \geq 3$ 都成立[且(A_m)不成立]。——602,③

④ 这里,占优意味着有一个更大的纵坐标。——602,④

⑤ 这里,占优意味着有一个更大的 n 分量,且由此,非周期性是显然的。——602,⑤

603 尤其是那里的(64:12)和(64:13)所表明的那样,在垄断或买方垄断的情况下,存在着一个非周期的占优概念。①

因此,十分引人注目的是,在所有这些情况中,我们发现,存在着解的扩展族。事实上,不仅数字参数,甚至高度未确定的曲线或函数也进入了这些解。对此,第一种情况下见 47.5.5 和图 81,第二种情况下见 55.12 中第五点说明。在第三种情况下,我们只能提一下一个特殊情况的数学讨论:62.3、62.4 和 63.4 中分析的三人市场——垄断与双头垄断。

65.9.2 在上述非周期情况下,如果强调这些 D(被考虑的分配的集合)的无穷性,解的巨大个数似乎是自然的事情。无论如何,只有在有限集 D 的情况下,非周期性才意味着解的惟一性,对于无穷集来说,严格非周期性成了至关重要的概念。(见 65.8 的最后一部分,尤其是 65.8.2。)当然了,不难验证,所有这些例子都不是严格非周期的。

不过,由于下述理由,这种情形是自我矛盾的:如 67.1.2中将要分析的那样,效用概念的修改能够使上述集合 D 成为有限集。这样,上述非周期博弈将有惟一解。现在,这些修改能够做到任意接近于最初的、未被修改的博弈。因此,有很多解(无穷的 D!)的最初的非周期博弈能够被修改后的具有惟一解(有限的 D)的非周期博弈任

---

① 这里,占优意味着有一个更大的 1(或 1*)分量,且由此,非周期是显然的。

如果垄断和买方垄断都不存在,即如果用上述概念说,$l,m>1$,那么,适用的是(64:10)、(64:11),而不是(64:12)、(64:13)。容易验证,在这种情况下,非周期性并不成立。——603,①

意近似。这些惟一的解如何能够"任意接近"不惟一解呢?

这种自我矛盾的情形将在第 67 节中得到详细描述。我们在那里给出的分析将证明这一缺乏连续性,并有机会提供某些有一定意义的解释。

66. 效用概念的推广

66.1 推广:理论描述的两个阶段

66.1.1 上一节中,我们用一个关系 HS 取代占优,并以此为基础以一种最为广泛的方式推广了解的概念。这些推广应该以如下方式应用我们的理论:我们的分配、占优和解的概念的基础是更为基本的效用概念。现在,如果我们想要改变用于描述后者的形式体系,那么,我们就能 604
够尝试通过前者概念的适当推广充分给出这些变形。

当然,我们并不希望为了推广而推广,不过,存在着能够使我们的理论更为切实的某些推广。尤其是:我们曾经以狭隘和教条的方式对待效用概念。我们不仅假设它是数字的——对此,我们能够构造一个还算说得过去的例子(见 3.3 和 3.5),而且还假设不同玩家之间的效用是能够替代和不受限制地转移的(见 2.1.1)。我们这么做有技术上的理由:数字效用是二人零和博弈需要的——尤其因为数学期望在这一博弈中必须发挥的作用。可替代性和可转移性也是 n 人零和博弈的需要,为的是产生属于向量

的分配，它有数字分量和数值特征函数。所有这些必需的东西都隐含地出现在以前者为基础的每个结构之中，并最终出现在我们的一般 n 人博弈理论之中。

因此，效用概念的推广性修改似乎是必要的，与此同时，为了完成这一计划，我们必须克服一些困难。

66.1.2 我们的博弈理论显然分两个不同阶段：第一阶段研究二人零和博弈的描述，并引出了导致它的值的定义；第二个阶段研究 n 人零和博弈，就像二人博弈的值的定义那样，这一研究的基础是特征函数。我们在上面指出了这两个阶段如何使用了效用概念的特定性质。因此，如果这些性质中的任何一个被推广、修改或放弃了，那么，我们就必须研究这样一个变化在每一阶段中的影响。这也意味着，我们要对这两个阶段进行分别的分析。

66.2 第一个阶段的讨论

66.2.1 第一个阶段的推广十分困难。如第 3 章中阐述的那样，二人零和博弈理论处处用到效用的数字特征。

尤其是：除非每位玩家总能够决定若干情况中何者是他所倾向的，难以看出如何赋予一局博弈一个确定的值。这意味着，个人偏好必须界定效用的一个完备排序。

接着，把效用和数字概率结合起来的运算离不开两者中的任何一个。我们已经看到，如果博弈规则允许机会动作，那么，它也许明确要求这样的运算。但是，即便情况不是这样，第 3 章的理论一般来说也会导致具有相同后果的混合策略的应用。（见第 17 节。）

现在,众所周知,效用的完备排序特征并不意味着它一定是数字的。但是,我们在3.5中看到,把效用与数字概念结合起来的完备排序则意味着效用的数字特征。 605

因此,除非有数字效用,我们现在还无法赋予一个博弈一个值。

在 n 人博弈中,特征函数是借助各个(辅助)二人零和博弈的值来定义的。我们把一般 n 人博弈简化为零和博弈进一步用到了效用从一位玩家到另一位玩家的可转移性。事实上,56.2.2中 $H_{n+1} \equiv -\sum_{k=1}^{n} H_k$ 之类的结构几乎不可能被赋予其他含义。因此,一个 n 人博弈中特征函数的定义与效用的数字本质有着技术上的联系,我们目前还无法摆脱这一联系。

这样一个特征函数的值 $v(S)$ 是相应玩家集合——联盟——S 的值。因此,我们的结论也能够说成:我们给每个可能的玩家联盟赋值的一般方法基本上有赖于效用的数字本质,而且,我们尚且无法改变这一点。

我们在前面指出过,效用的数字本质假设并不像一般认为的那样特别。(见第3节的讨论。)另外,通过指定我们分析的是一个严格的货币经济,我们能够避免所有概念上的困难。使我们的理论摆脱这一限制毕竟是一件好事,不过,我们必须承认,做到这一点的可能性还没有得到证明。

66.2.2 尽管有这一一般的不足,存在着很多博弈,其特征函数的定义不会遇到十分严重的困难。26.1和57.3的例子就属于这一类,它们的特征函数能够直接被

确定，并不真的需要对二人零和博弈理论进行详尽分析。的确，这些是合成的例子，为的是得到一个预先确定的已知特征函数，从而，其在这方面易于处理也就不足为奇了。然而，也存在着有一定意义的其他类似情况：在第 10 章的简单博弈理论中，特征函数没有带来任何困难。① 再有，61.2—64.2 中考虑的各种市场都有易于处理且直接得到的特征函数。

在这些情况中，我们容易用更为一般的概念取代数字效用。我们将其放在其他地方来完成。

66.3 第二个阶段的讨论

606 **66.3.1** 如果把特征函数看作已经被给定，那么，我们就能够进入第二阶段。

这里，数字效用的必要性能够完全被避开。我们不打算对此进行详细描述，因为这个题目似乎尚未发展到适合最终数学形式化描述的程度。事实上，第一个阶段受阻于上述未解决的困难。另外，我们似乎有一些理由相信，一个更为统一的理论形式也许会把我们引向渴望中的目标。关于这一理论形式，我们目前只能看到一个轮廓。

因此，关于第二阶段的描述，我们只能给出一些一般性的提示。

首先，当我们声明放弃效用的可转移性时，以及当我们声明放弃其数字特征时，零和博弈或常数和博弈之类的概

① 这些博弈是通过指出哪些是胜利联盟来定义的，这意味着特征函数被隐蔽地决定了。——605，①

念不是直接地定义的。因此,我们最好直接研究一般博弈。

让我们考虑一个一般 n 人博弈。由于我们有第 11 章的理论,我们可以忘却其在零和博弈理论中的原型,并试图将其直接扩展到更为一般的(非数字、不可转移)效用的情况。

分配

$$\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}\}$$

仍旧是一个向量,但其分量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 可以不是数字。必须注意的是,如果我们放弃效用的数字特征,我们最好承认每个参与者 $i(=1, \cdots, n)$ 有他自己的效用域 U_i。也就是说,$U_1, \cdots, U_n$ 一般来说是不同的。在这结构中,分量 α_i 必须属于 U_i。

必须注意的是,即便所有效用都是数字的——即如果 $U_1, \cdots, U_n$ 都相同且等于实数集——我们仍然可以略去可转移性假设。再有,我们可以考虑可转移性存在但服从一定的约束的情况。我们将在第 67 节中讨论一个这样的例子。

66.3.2　现在,我们必须考虑分量 α_i 受到的约束。这些约束有两类:第一,全部分配的值域在 56.8.2 中定义为

(66:1)　　$\alpha_i \geqq \mathrm{v}[(i)], \quad i = 1, \cdots, n,$

(66:2)　　$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqq \mathrm{v}[(1, \cdots, n)]$。①

第二,基于

---

① 这里,我们倾向于利用(56:10),而不愿意利用 56.12 中(56:Ⅰ:b)的(56:25)。——606,①

607 (66:3) $$\sum_{i\text{属于}S} \alpha_i \leqq \mathrm{v}(S),$$

我们借助有效集概念来定义占优,而(66:3)正是30.1.1的(30:3)。

这些不等式都属于同一类:(66:1)中给定一个集合$T[=(i)]$,(62:2)中给定集合$T=(1,\cdots,n)=I$,(66:3)中$T=S$,而且要求分配$\vec{\alpha}$把集合——联盟——T置于这样一个地位,在(66:1)中它至少与$\mathrm{v}(T)$指出的位置同样好,或者在(66:2)和(66:3)中它至多与$\mathrm{v}(T)$指出的位置同样好。

联盟T的地位——即其全部参与者的合成位置——在这些不等式中表达为它们的分量的和:$\sum_{k\text{属于}T} \alpha_k$。对于非数字效用来说,值域$U_1,\cdots,U_n$可以相互不同,而且可能不存在它们的相加,从而给出$\sum_{k\text{属于}T} \alpha_k$一类的描述是没有意义的。但是,即便效用是数字的,$\sum_{k\text{属于}T} \alpha_k$的上述意义上的使用也显然等价于假设不受限制的可转移性。事实上,要使一个联盟的地位能够由给予其各成员的数额之和来描述——不用提到个别数额本身,这些成员必须能够在其内部找到一个全体同意的分配这个和的办法,即不存在转移的任何物理障碍。

一般来说,我们将不得不放弃使用$\sum_{k\text{属于}T} \alpha_k$。我们反而必须为这个由给定的联盟$T$中的成员组成的合成的人引入效用域。我们用$U(T)$记这个域。显然,$U[(k)]$与$U_k$相同。$U(T)$必须能够通过某种方法得自$T$中全部$k$的$U_k$。找到这一过程所需要的数学过程并不困难,不过,我

们将其放在别处讨论。

α_k(k 属于 T)的综合以及特征函数的值 v(T)必须是这个系的元素。不等式(66:1)、(66:2)和(66:3)指这一效用系中的偏好。

66.4 统一两个阶段的可取之处

66.4 为使读者不会觉得 66.3 的分析过于粗糙,我们将以某种方式实现两个阶段的理想统一。对于零和 n 人博弈,甚至一般 n 人博弈来说,作为分配、占优和解的后续结构,我们的二人零和理论真正建立在相同一般原则之上。尤其是,14.5、17.8 和 17.9 中给出的二人零和博弈中各种策略的相互关联的重要讨论——即关于良策概念的讨论——以多种方式类似于分配的占优的使用。 608

现在,我们目前的理论的缺陷似乎存在于分两个阶段进行的必要性:首先给出二人零和博弈的一个解,然后,利用这个解的定义,定义一个特征函数,为的是以这个特征函数为基础给出一般 n 人博弈的一个解。数学和物理学中的一般经验告诉我们,这一两阶段过程有一个由此种情况下的特征函数代表的一个中间停顿,该过程有两个基本方面。在早期研究阶段,它是有利的,因为它分散了困难。然而,在后期阶段,当需要概念的充分一般性时,它会成为一个不足。在我们的过程中间产生一个陡然地定义的数量——特征函数——有可能是一个不必要的技术细节,给主要问题增加了额外困难。

具体到我们在博弈论中的经验:为了克服困难,我们不得不把它们切分,并依次分析具有严格决定性的二人零

和博弈、具有一般严格决定性的二人零和博弈、n 人零和博弈和一般 n 人博弈。然而，这些步骤中只有两个最终出现在一般理论之中：只有二人零和博弈和 n 人一般博弈保留下来了。我们坚持使用特征函数，等于坚持认为，与我们认为满意的 n 人博弈的结果相比，二人零和博弈有一个漂亮得多的中间结果。① 当然，在数字的、不受限制的、可转移效用的情况下，我们能够满足这些要求。然而，当有关效用的这些假设被忽略时，事情可能会有所不同。而且，似乎有着表面合理性的是，我们关于 n 人博弈的困难也许来自我们连续坚持二人零和博弈的这一特殊结构。我们当前的技术程序迫使我们坚持这一方面，但这有可能是错误的。

全部 n 人博弈理论的一个统一描述——没有在二人零和博弈和特征函数上的人为停顿——也许最终证明是解决这些困难的出路。

67. 一个例子

67.1 描述

67.1.1 下面，我们要讨论一个例子，其中的效用概
609 念和可转移性将被修改。这些修改并不代表我们关于这

① 对于二人零和博弈，我们得到了惟一一个值——即分配。对于一般博弈（以及 n 人零和博弈）来说，我们只有一个——常见但不惟一——的解，而且个别解还是一些分配组成的一个集合！——608，①

些概念的观点的有意义拓展。我们的例子的意义更多地在于，它允许我们关于非周期性的结果的一个应用，从而使我们对 65.9 末尾讨论的题目有一些新的理解。尤其是，我们希望这类过程将为讨价还价现象提供一个更为充分的数学方法。

67.1.2 我们要考虑的修改是：我们假设效用——或它的货币等价——有不可分的单位组成。也就是说，我们不怀疑它的数字特征，但要求它的值——以适宜的单位——是一个整数。因此，转移也必然限于整数，但我们不做进一步限制。我们准备像过去那样利用特征函数，但也要有整数值。定义域和解的概念并不因此而受到影响。

如果把这一观点应用于一般博弈和二人博弈，那么，不会发生显著变化。也就是说，所有的事情基本上都像我们的旧理论那样。因此，没有必要深入这些情况的细节。另一方面，三人博弈表现出一些新的特点，即便取其原有的零和形式。它引出了一些相当奇怪的困难。这些困难相当有意思，且尚未得到充分分析。因此，我们宁愿把这一讨论放在其他地方。

这排除了新结构中一般三人博弈的详尽讨论。然而，我们将分析一个特例，它直接和讨价还价的本质有关。这就是一个卖者和两个买者组成的三人市场。

67.1.3 在前面的分析中，我们得到了不同的解，依赖于我们假设仅有一次交易还是有多次交易，也依赖于两位买者的相对力量。这些解由 62.5.2 的(62:C)和 63.5 的(63:E)描述。在所有这些情况中，一般解由两部分组成：(62:18)[或(62:20)、(62:21)和(63:30)]和(62:19)

[或(62:23)和(63:31)]。我们那里的讨论表明,(62:18)对应着的情况中两位买者已经结成了针对卖者的联盟。(62:18)是惟一地决定的且基本上与关于这个题目的普通常识性经济学概念一致。另一方面,(62:19)是借助某种具有高度随意性的函数关系定义的。正如我们在62.6.2中看到的那样,这些表达的是建立结盟的两个买者之间的分配规则的多种可能性。也就是说,它们组成其联盟内部的行为标准。我们现在的讨论是要提供更多有关这部分社会机制的功能的信息。

为了有效地这么做,我们可以合理地去掉问题中与此
610 无关的那些因素。也就是说,我们希望避开解的(62:18)部分。62.5.2和62.6.1告诉我们,当 $v=w$ 时,这部分是最小的一部分——而且的确能够被全部略去(见第571页脚注①)。这意味着,只有一次(不可分)的交易能够发生且两位买者完全同样有力量。这样,解由62.5的(62:20)和(62:19)给出,(62:20)是多余的(见上),或等价地由图99给出。

所以,我们在62.1.2的方案中假设 $v=w$。通过令"对于卖者来说的备择用途" $u=0$,我们能够进一步简化情况,而不造成明显损失。以这种方式,定义特征函数的62.1.2的(62:2)—(62:4)简化为

$$(67:1)\quad \begin{cases} \mathrm{v}[(1)]=\mathrm{v}[(2)]=\mathrm{v}[(3)]=0, \\ \mathrm{v}[(1,2)]=\mathrm{v}[(1,3)]=w, \quad \mathrm{v}[(2,3)]=0, \\ \mathrm{v}[(1,2,3)]=w。\end{cases}$$

现在,分配的定义是:

$$\vec{\alpha}=\{\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}\}。$$

其中，

(67:2:a)　　$\alpha_1 \geqq 0, \alpha_2 \geqq 0, \alpha_3 \geqq 0$,

(67:2:b)　　$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leqq w$。①

67.1.4　现在，我们假设所有这些量都是整数——即给定的 w 和(67:2:a)、(67:2:b)的所有允许的 α_1、α_2、α_3。

我们像过去那样定义占优，即遵从 56.11.1——这意味着，我们一字不漏地重复 30.1.1 的定义。

我们要根据集合 $S \subseteq I = (1,2,3)$ 在定义一个占优关系时的作用来决定其特征。容易证明，集合

$$S = (1,2),(1,3)$$

是肯定必要的，而其他集合则是肯定不必要的。② 因此，我们能够利用有 $S = (1,2),(1,3)$ 的占优的定义。即： *611*

$$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$$

① 注意，我们正在利用的(67:3:b)中有≦而不是 =。这是 66.3.2 中(66:2)的讨论中采取的观点。用 56.12 中(56:Ⅰ:b)的术语说，这等于利用(56:10)而非(56:25)。这么做的理由是，前一条件是最初的条件(例如，见 56.8.2)，56.12中用到了的这两者的等价在我们即将利用的结构中不成立。

你将会看到，在 67.2.3 的第一点说明中，(67:2:b)中的≦和 = 必定产生不同结果，不过，这一不同毕竟属于一般情形。另外，(67:2:b)中使用 = 而不使用≦导致的结果与我们即将得到的结果相比只存在次要细节上的不同。——610,①

② 肯定必要集和肯定不必要集的条件是在 31.1 中给出的，59.3.2 中重新进行了分析。由于我们的观点已经再次发生了变化(见上，尤其是脚注①)，有必要又一次重新考虑这些事情。较简单的做法是再次将它们照搬过来：

由(67:2:a)和 30.1.1 中条件(30:3)，每个有 $v(S) = 0$ 的 S 都是肯定不必要集。这就解决了 $S = (1),(2),(3),(2,3)$。(67:1)、(62:2:a)和(67:2:b)给出 $\alpha_1 + \alpha_2 \leqq w = v[(1,2)]$，$\alpha_1 + \alpha_2 \leqq w = v[(1,3)]$，因此 $S = (1,2),(1,3)$ 是肯定必要集。又 31.1.3 中的(31:C)显然成立，这使得 $S = (1,2,3)$ 是肯定不必要集。——610,②

意味着

(67:3:a) $\alpha_1 > \beta_1$

且

(67:3:b) $\alpha_2 > \beta_2$ 或 $\alpha_3 > \beta_3$。

因此,占优隐含着(67:3:a),从而它显然是非周期的。(见 65.9 的相应讨论。)再有,$\vec{\alpha}$ 的值域(67:2:a)和(67:2:b)是有限集,因为分量 α_1、α_2、α_3 必须是整数。①

现在,我们应用 65.7.2 的(65:X):有且只有一个解 V_0,它由公式(65:2)和(65:3)刻画。

67.2 解及其解释

67.2.1 为了应用 65.7.2 的公式(65:2)和(65:3),我们必须确定 65.7.1 的开始定义的集合 B_i、C_i。让我们从 B_1、C_1 开始。

B_1 是这样的 $\vec{\alpha}$ 组成的集合,它们不会被占优。要占优 $\vec{\alpha}$,我们必须增加 α_1 和 α_2,或 α_3 而不破坏 67.1.3 中的(67:2:a)和(67:2:b)。这些增加至少增加 1,而 α_2、α_3 中的另一个可以至多被减少到 0。因此,$\vec{\alpha}$ 能够被占优的情况是

$$(\alpha_1+1)+(\alpha_2+1)\leqq w \text{ 或} (\alpha_1+1)+(\alpha_3+1)\leqq w。$$

所以,B_1 被定义为

612 (67:4)
$$(\alpha_1+1)+(\alpha_2+1)>w,$$
$$(\alpha_1+1)+(\alpha_3+1)>w。$$

根据(67:2:a)和(67:2:b),这意味着 $\alpha_3<2$,$\alpha_2<2$,即 α_2,$\alpha_3=0,1$。这样,(67:4)结合(67:2:a)、(67:2:b)给出下

① 在最初的连续统结构中,情况自然不是这样。——611,①

述可能性：

(67:A)　　$\alpha_2=\alpha_3=0,\quad \alpha_1=w,w-1;$

(67:B)　　$\left\{\begin{matrix}\alpha_1=1,\alpha_3=0\\ \text{或 } \alpha_2=0,\alpha_3=1\end{matrix}\right\},\alpha_1=w-1;$

(67:C)　　$\alpha_2=\alpha_3=1,\quad \alpha_1=w-2$。

C_1 是这样的 $\vec{\alpha}$ 组成的集合，它们被 B_1 中的元素占优，即被(67:A)—(67:C)的 $\vec{\alpha}$ 占优。容易验证，这些由

(67:D)　　$\left\{\begin{matrix}\alpha_2=0\\ \text{或 } \alpha_3=0\end{matrix}\right\},\alpha_1\leqq w-2$

描述。

67.2.2　现在，我们最好避开 65.7.2 的(65:2)和(65:3)，即不继续确定 $B_2,C_2,B_3,C_3,\cdots$，转而利用一个尤其适合当前情况的归纳过程。这个过程是：
考虑满足下式的 $\vec{\alpha}$：

(67:E)　　$\alpha_2=0$　或　$\alpha_3=0$。

它们恰好满足(67:A)、(67:B)和(67:D)。我们知道，这些 $\vec{\alpha}$ 中，V_0 恰好包含(67:A)和(67:B)。其余的 $\vec{\alpha}$ 是这样一些 $\vec{\alpha}$：

(67:F)　　$\alpha_2,\alpha_3\geqq 1;$

因此，它们不被(67:A)和(67:B)占优。这样，我们通过在(67:F)之外取(67:A)和(67:B)构造 V_0 并重复(67:F)中的求解过程。

比较(67:F)和 67.1.3 中的(67:2:a)和(67:2:b)。惟一的区别是，α_2、α_3 都增加了 1。因此，w 必须被当作它好像是 $w-2$。因此，V_0 进一步包括

(67:G)　　$\alpha_2=\alpha_3=1,\quad \alpha_1=w-2,w-3;$

(67:H) $\left\{\begin{array}{l}\alpha_2=2,\alpha_3=1\\ \text{或}\\ \alpha_2=1,\alpha_3=2\end{array}\right\},\quad \alpha_1=w-3;$

而且,我们必须在

(67:I) $\alpha_2,\alpha_3\geqq 2$

中重复这一求解过程。

这一过程的重复把

(67:J) $\alpha_2=\alpha_3=2,\quad \alpha_1=w-4,w-5;$

(67:K) $\left\{\begin{array}{l}\alpha_2=3,\alpha_3=2\\ \text{或}\\ \alpha_2=2,\alpha_3=3\end{array}\right\},\quad \alpha_1=w-5$

赋予 V_0,而且要求在

(67:L) $\alpha_2,\alpha_3\geqq 3$

中重复这一求解过程,如此等等。

因此,V_0 由(67:A),(67:B),(67:G),(67:H),(67:J),(67:K),…组成。这个集合能够被描述如下:

(67:M) $\alpha_1=0,1,\cdots,w;$

613 (67:N) 如 $w-\alpha_1$ 是偶数,那么,

$$\alpha_2=\alpha_3=\frac{w-\alpha_1}{2}。$$

(67:O) 如 $w-\alpha_1$ 是奇数,那么,

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_2=\alpha_3=\dfrac{w-1-\alpha_1}{2}\\ \alpha_2=\dfrac{w+1-\alpha_1}{2},\alpha_3=\dfrac{w-1-\alpha_1}{2}。\\ \alpha_2=\dfrac{w-1-\alpha_1}{2},\alpha_3=\dfrac{w+1-\alpha_1}{2}\end{array}\right.$$

67.2.3 结果(67:M)—(67:O)暗示着如下说明：

第一：这个解中的 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 的值是 w 和 $w-1$。因此，我们无法用 = 取代 67.1.3 的(67:2:b)中的 ≦，56.12 的(56:I:b)中的结果不再成立。最大社会利益未必得到实现——这是一个不可分的效用单位的直接结果。①

第二：当 $w\to\infty$ 时，这一"离散的"效用刻度收敛于我们常用的连续刻度。(见 19.12 中有关扑克游戏中离散和连续"手中牌"的相应讨论。)如上所述，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 和 w 最多相差 1。所以，随着 $w\to\infty$，它变得越来越不显著，即这种情况这个方面趋于与连续情况一致。

第三：α_2 和 α_3 之间最多相差 1。所以，随着 $w\to\infty$，这也变得越来越不显著。也就是说，当我们逼近连续情况时，解趋于：

(67:P) $$0\leqq\alpha_1\leqq w,$$

(67:Q) $$\alpha_2=\alpha_3=\frac{w-\alpha_1}{2}。$$

正如我们在 67.1.3 的第一部分中指出的那样，这个解必须与 62.5.1 中 $u=0,v=w$ 的(62:19)比较。这两个解的确相似，但我们的解只覆盖(62:19)的一种特殊情况：那里提到的 α_1 的单调递减函数相互一致且等于 $\frac{w-\alpha_1}{2}$。

正如 62.6.2 中讨论的那样，这些函数描述了两位玩家在建立他们的联盟时达成的分配规则[表达为

① 见第 513 页脚注③。——613,①

(62:19)]。但现在,在离散情况下,我们发现它被完全决定了——两位玩家必须被一视同仁!

这一对称性的含义是什么呢?在"离散"情况下,其他分配规则——即(62:19)中其他函数选择——真的不可能吗?

67.3 推广:不同离散效用刻度

614 **67.3.1** 为了回答上述问题,我们将破坏(两位买者之间的)对称性,但保留"离散性"。

为此,我们改变67.1的结构:我们规定这一不可分的效用单位对于买者2、3来说分别有不同的值。具体来说:让我们规定α_1、α_2必须是整数,而α_3必须是偶数。除此之外,67.1中的所有事情都保持不变。

现在,我们给出与67.2的讨论等价的讨论。相应地,我们也从确定65.7的集合B_1、C_1开始。

B_1是这样的$\vec{\alpha}$组成的集合,它们不会被占优。要占优$\vec{\alpha}$,我们就必须增加α_1和α_2或α_3,且不破坏67.1.3中的(67:2:a)和(67:2:b)。(对于α_1、α_2来说)这些增加至少是1,或者(对于α_3来说)至少是2,而α_2、α_3中的另一个则可以被减少到0。因此,$\vec{\alpha}$能够被占优的条件是:$(\alpha_1+1)+(\alpha_2+1)\leqq w$或$(\alpha_1+1)+(\alpha_3+1)\leqq w$。这样,$B_1$被定义为

(67:5) $$(\alpha_1+1)+(\alpha_2+1)>w,$$
$$(\alpha_1+1)+(\alpha_3+1)>w。$$

由(67:2:a)和(67:2:b),这意味着,$\alpha_3<2$,$\alpha_2<3$,即$\alpha_2=0,1,2$,$\alpha_3=0$。这样,(67:5)与(67:2:a)和(67:2:b)合起

来给出以下可能性：

(67:R)　　$\alpha_2=0,\quad \alpha_3=0,\quad \alpha_1=w,w-1;$

(67:S)　　$\alpha_2=1,\quad \alpha_3=0,\quad \alpha_1=w-1,w-2;$

(67:T)　　$\alpha_2=2,\quad \alpha_3=0,\quad \alpha_1=w-2$。

C_1 是这样的 $\vec{\alpha}$ 组成的集合，它们被 B_1 的元素占优，即被(67:R)—(67:T)中的 $\vec{\alpha}$ 占优。容易验证，这些 $\vec{\alpha}$ 由下式描述：

(67:U)　　$\alpha_2=0,\quad \alpha_1\leqq w-2;$

(67:V)　　$\alpha_2=1,\quad \alpha_1\leqq w-3$。

67.3.2　现在，我们重复 67.2.2 的变形：不直接决定 $B_2,C_2,B_3,C_3,\cdots$，我们使用一个不同的归纳过程。

考虑满足

(67:W)　　$\alpha_2=0,1$。

的 $\vec{\alpha}$。它们恰好组成(67:R)、(67:S)、(67:U)和(67:V)。[①] 我们知道，在这些 $\vec{\alpha}$ 中，V_0 恰好包含(67:R)和(67:S)。其余 $\vec{\alpha}$ 是满足下式的那些 $\vec{\alpha}$：

(67:X)　　$\alpha_2\geqq 2;$

它们不被(67:R)和(67:S)占优。所以，我们通过在 615
(67:X)之外取(67:R)和(67:S)来构造 V_0，并在(67:X)中重复这一求解过程。

把(67:X)与 67.1.3 中的(67:2:a)和(67:2:b)比较。惟一区别是，α_2 增加了 2。因此，w 必须被当作它好像是 $w-2$。[②]

---

① 注意，α_3 不可能等于 1，因为它必须是偶数。——614，①

② 注意，(67:F)之后，这与 67.2.2 中相应步骤有所不同。——615，①

因此，V_0 进一步包含

(67:Y) $\alpha_2=2,\alpha_3=0,\alpha_1=w-2,w-3$；

(67:Z) $\alpha_2=3,\alpha_3=0,\alpha_1=w-3,w-4$；

而且我们必须在

(67:A′) $$\alpha_2\geqq 4$$

中重复这一求解过程。这一过程把

(67:B′) $\alpha_2=4,\alpha_3=0,\alpha_1=w-4,w-5$；

(67:C′) $\alpha_2=5,\alpha_3=0,\alpha_1=w-5,w-6$；

给予 V_0，且要求我们在

(67:D′) $$\alpha_2\geqq 6$$

中重复这一求解过程，如此等等。

因此，V_0 由(67:R)，(67:S)，(67:Y)，(67:Z)，(67:B′)，(67:C′)，…。这个集合能够被描述为

(67:E′) $\alpha_1=0,1,\cdots,w$；

(67:F′) $\alpha_2=w-\alpha_1,w-1-\alpha_1$

(当 $\alpha_1=w$ 时，排除第二个)；

(67:G′) $$\alpha_3=0。$$

67.3.3 结果(67:E′)—(67:G′)暗示着如下说明：

第一和第二：关于和 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 及其与 w 的关系，我们可以一字不漏地照搬 67.2.3 的相应部分。

第三：这里的事情完全不同于 67.2.3，我们有完全相同的 $\alpha_3=0$。接近连续情况时，即 $w\to\infty$ 时，解趋于：

(67:H′) $$0\leqq\alpha_1\leqq w,$$

(67:I′) $$\alpha_2=w-\alpha_1,$$

(67:J′) $$\alpha_3=0。$$

如 67.2.3 的相应部分中所说明的那样，重复与 62.5.1

中(62:19)的比较,我们看到,现在的情况是:描述结成联盟的两位买者之间分配规则的(62:19)的单调递减函数再次被完全决定了——但是,这一次,我们发现,全部优势跑到买者 2 那儿去了!不像 67.2.3 那样,他们被一视同仁。

现在,我们必须把这一结果与 67.2.3 中的相应结果 616
进行比较并解释整个现象。

67.4　有关讨价还价的结论

67.4　从 67.2.3 和 67.3.3 的结果得出的结论是确凿无疑的。在前一种情况下,两位买者有完全相同的觉察力——即相同效用单位——且分配规则也指定将他们一视同仁。在后一种情况下,买者 2 比买者 3 更有觉察力——即 2 的效用单位是 3 的效用单位的一半——且分配规则中买者 2 完全处于优势。显然,假如他们的能力被颠倒一下,结果也如此。我们也可以说:如果结盟的买者有同样好的效用刻度,那么,他们之间的分配规则中的优势是均等的,不然,全部优势归有较精细效用刻度的买者所有。①

---

① 考虑更为精细的安排是可能的:我们能够赋予 α_2,α_3 的变动范围不同的稠密程度。在这种情况下,我们仍然有惟一的解,且理由同上。在(α_2,α_3)平面中,α_2 与 α_3 之间的关系是上述三种类型的组合:关于 α_2、α_3 对称,即平行于两个坐标轴的等分角线;平行于 α_3 轴;平行于 α_2 轴。

实际上,通过恰当选择 α_2、α_3 的取值范围,这些因素的任意组合都是可能的。以这种方式,任何想要的曲线形状都能够被近似得很好。这样,连续情况的最初一般性就得到了恢复。

我们不打算详细分析这个题目及其相关问题。——616,①

在离散情况下，这是正确的，因为每个参与者有一个确定的效用刻度且分配规则（即解）是惟一地决定的。在连续情况下，效用刻度的“精细程度”没有被界定，而且如我们已经看到的那样，分配规则有多种选择方式。

所以，我们第一次看到一位玩家的觉察力——具体为其主观效用刻度的精细程度——如何在他与一位盟友的讨价还价中有着决定性影响。① 因此，预料之中的事情是，这类问题只有在上述心理状况被恰当且系统地考虑进去了的时候才能够得到彻底解决。最后这一段分析也许是恰当的数学方法的第一个迹象。

① 这当然仅仅发生在有着连续效用的理论允许盟友之间有若干不同分配规则的情况下——当讨价还价起作用时当然是这种情况。——616，②

附录:效用的公理化描述

A.1 问题描述

A.1.1 在这个附录中,我们将证明,3.6.1 中列举的效用公理使得效用成了一个适合线性变换的数。[1] 更确切地说:我们将证明,这些公理隐含着,至少存在着一个(实际上是无穷多个)有性质(3:1:a)和(3:1:b)的映射,它把效用映射到 3.5.1 意义上的数。我们还将证明,任何两个这样的映射都互为线性变换,即它们之间有关系(3:6)。 617

在分析 3.6.1 的公理(3:A)—(3:C)之前,为了排除可能有的误解,我们另做两点说明。

A.1.2 第一:这些公理,尤其是(3:A)的一组公理,描述了基于关系 < 和 > 的完备排序的概念。我们不把 = 关系公理化,而将其解释为真正的相等。把 = 关系也公理化的另一过程从数学上说完全行得通,不过,我们的过程

① 即不用固定零效用和效用的单位。——617,①

也是如此。这两个过程是等价的，并且代表着不同的爱好。相关数学文献和逻辑学文献中的实际做法并不统一，我们将固守较为简单的过程。

第二：正如3.5.1的开头指出的那样，关于效用u、v的"自然"关系$u>v$和关于数ρ、σ的数字关系$\rho>\sigma$，我们都使用符号>；而且，关于效用u、v的"自然"运算$\alpha u+(1-\alpha)v$和关于数ρ、σ的数字运算$\alpha\rho+(1-\alpha)\sigma$，我们也都使用符号$\alpha\cdots+(1-\alpha)\cdots$（两种情况下，$\alpha$都是一个数）。有人也许反对说，这一做法会导致误解和混乱；然而，假如我们始终清楚其中涉及的量是效用（u，v，w）还是数（α，β，γ，…，ρ，σ），也就不会出现误解。两种情况（"自然的"和数字的）中的关系和运算的这一标识设定有一定的简洁性并利于保持"自然"关系和数字关系之间的相互联系。出于这些理由，在数学文献中的相似情况中，这基本上是普遍接受了的，我们也准备利用它。

A.1.3 对于没有经过数学训练的读者来说，A.2的推理过程也许长而枯燥乏味。从纯粹数学的角度看，还存在另一点反对意见，即它们无法得到深入分析——潜伏于
618 这些推理背后的概念相当简单，但不幸的是，为了完备，技术上的实现却不得不弄得有点烦琐。简短一些的阐述也许会被发现。

不管怎样，我们现在还不得不利用A.2中的方法，尽管从审美的角度看它不那么令人满意。

A.2 基于公理的推导

A.2.1 下面,我们从 3.6.1 的公理(3:A)—(3:C)出发进行推理。这一演绎将被分成若干步骤,而且它将在这一节和后续四节中完成。最终的结果将在(A:V)和(A:W)中给出。

(A:A) 如果 $u<v$,那么,$\alpha<\beta$ 意味着

$$(1-\alpha)u+\alpha v<(1-\beta)u+\beta v。$$

证明:显然 $\alpha=\gamma\beta, 0<\gamma<1$。由(3:B:a)(应用于取代 u、v、α 的 u、v、$1-\beta$),$u<(1-\beta)u+\beta v$,从而,由(3:B:b)[应用于取代 u、v、α 的 $(1-\beta)u+\beta v$、u、γ],

$$(1-\beta)u+\beta v>\gamma[(1-\beta)u+\beta v]+(1-\gamma)u。$$

由(3:C:a),这能够被写成

$$(1-\beta)u+\beta v>\gamma[\beta v+(1-\beta)u]+(1-\gamma)u。$$

现在,由(3:C:b)(应用于取代 $u, v, \alpha, \beta, \gamma=\alpha\beta$ 的 $v, u, \gamma, \beta, \alpha=\gamma\beta$),右边是 $\alpha v+(1-\alpha)u$,由(3:C:a),从而是 $(1-\alpha)u+\alpha v$。故,$(1-\alpha)u+\alpha v<(1-\beta)u+\beta v$。

(A:B) 给定 u_0, v_0 且 $u_0<v_0$,考虑映射

$$\alpha \rightarrow w=(1-\alpha)u_0+\alpha v_0。$$

这是从区间 $0<\alpha<1$ 到区间 $u_0<w<v_0$ 的一部分的一个一一单调映射。[①]

① 它将出现在(A:C)中,这个部分实际上整个区间 $u_0<w<v_0$。——618,①

证明：这个映射落在区间 $u_0 < w < v_0$ 上：$u_0 < w$ 与(3:B:a)(应用于取代 u、v、α 的 u_0、v_0、$1-\alpha$ 上)一致，$w < v_0$ 与(3:B:b)(应用于取代 u、v、α 的 v_0、u_0、α 上)一致。

一一特征：这一性质得自我们下面要证明的单调性。

单调性：单调性与(A:A)同。

(A:C)　　(A:B)中的映射实际上把 $0<\alpha<1$ 的 α 映射到 $u_0<w<v_0$ 的所有 w。

证明：假设这一说法不成立，即有 $u_0 < w_0 < v_0$ 的某个 w_0 被漏掉了，那么，对于 $0<\alpha<1$ 中的所有 α 来说，$(1-\alpha)u_0+\alpha v_0 \neq w_0$，即 $(1-\alpha)u_0+\alpha v_0 \lesseqgtr w_0$。按照我
619 们是否有 < 或 >，令 α 属于类Ⅰ或类Ⅱ。显然，这两个相互排斥的类合起来穷尽区间 $0<\alpha<1$。这样，我们看到：

第一：类Ⅰ不是空集。这是(3:B:c)(应用于取代 u、w、v、α 的 v_0、w_0、u_0、α)的直接结果。

第二：类Ⅱ不是空集。这是(3:B:d)(应用于取代 u、w、v、α 的 v_0、w_0、u_0、α)的直接结果。

第三：如果 α 属于Ⅰ且 β 属于Ⅱ，那么，$\alpha<\beta$。事实上，由于Ⅰ和Ⅱ不相交，必然有 $\alpha \neq \beta$。因此，剩下的惟一情况是 $\alpha>\beta$。但这样的话，(A:B)的映射的单调性意味着，因为 α 属于Ⅰ使得 β 必须也属于Ⅰ——这与 β 属于Ⅱ矛盾。因此，惟一的可能是 $\alpha<\beta$。

考虑到Ⅰ、Ⅱ的三个性质，必定存在一个 α_0，$0<\alpha_0<1$，它把它们分隔开，即使得Ⅰ的所有 α 有 $\alpha \leqq \alpha_0$，且Ⅱ的所有

α 有 $\alpha \geqq \alpha_0$。①

现在,α_0 本身必定属于Ⅰ或Ⅱ。我们做出相应区别:

第一:α_0 属于Ⅰ。那么,$(1-\alpha_0)u_0+\alpha_0 v_0<w_0$。另有,$w_0<v_0$。应用(3:B:c)[用$(1-\alpha_0)u_0+\alpha_0 v_0$、$w_0$、$v_0$、$\gamma$替换$u$、$w$、$v$、$\gamma$],我们有满足$0<\gamma<1$的$\gamma$,且$\gamma[(1-\alpha_0)u_0+\alpha_0 v_0]+(1-\gamma)v_0<w_0$,即,由(3:C:b)[用$u_0$、$v_0$、$\gamma$、$1-\alpha_0$、$1-\alpha=\gamma(1-\alpha_0)$替换$u$、$v$、$\alpha$、$\beta$、$\gamma=\alpha\beta$],$(1-\alpha)u_0+\alpha v_0<w_0$。故,$\alpha=1-\gamma(1-\alpha_0)$属于Ⅰ。然而,$\alpha>1-(1-\alpha_0)=\alpha_0$,尽管我们应该有$\alpha \leqq \alpha_0$。

第二:α_0 属于Ⅱ。那么,$(1-\alpha_0)u_0+\alpha_0 v_0>w_0$。另有$u_0<w_0$。应用(3:B:d)[用$(1-\alpha_0)u_0+\alpha_0 v_0$、$w_0$、$u_0$、$\gamma$替换$u$、$w$、$v$、$\alpha$],我们得到一个$\gamma$满足$0<\gamma<1$且$\gamma[(1-\alpha_0)u_0+\alpha_0 v_0]+(1-\gamma)u_0>w_0$,即,由(3:C:a),$\gamma[\alpha_0 v_0+(1-\alpha_0)u_0]+(1-\gamma)u_0>w_0$,从而由(3:C:b)(用$v_0$、$u_0$、$\gamma$、$\alpha_0$、$\alpha=\gamma\alpha_0$替换$u$、$v$、$\alpha$、$\beta$、$\gamma=\alpha\beta$),$\alpha v_0+(1-\alpha)u_0>w_0$,即,由(3:C:a),$(1-\alpha)u_0+\alpha v_0>w_0$。故,$\alpha=\gamma\alpha_0$属于Ⅱ。然而,$\alpha<\alpha_0$,尽管我们应该有$\alpha \geqq \alpha_0$。

因此,在每种情况下,我们都得到一个矛盾。所以,最初的假设是不可能的。结论得证。

A.2.2 这里,我们要暂停一下。(A:B)和(A:C)已

---

① 这在直觉上十分合理。它更是一个完全严格的推断。事实上,它与实数的引人中用到的经典定理之一相同,这个定理是关于狄德金(Dedekind)分割的一个定理。实函数理论或分析基础方面的教科书中有这方面的详细内容。例如,见卡拉西奥德利的前面引用过同一著作,第343页脚注①。见那里第11页,公理Ⅶ。我们的类Ⅰ应该代人那里提到的集合{a}。那里的集合{A}包含我们的类Ⅱ。——619,①

经实现了一个从效用区间 $u_0 < w < v_0$（u_0、v_0 固定不变且 $u_0 < v_0$，要不就随意！）到数字区间 $0 < \alpha < 1$ 的一一映射。这显然是迈向效用的数字表示的第一步。然而，这个结果在若干方面仍有不完美之处。其主要缺陷是：

第一：数字表示只是就一个效用区间 $u_0 < w < v_0$ 得到了，而非同时就所有效用得到了。我们不清楚如何把与这些不同的对 u_0, v_0 相应的映射组装在一起。

第二：(A:B)和(A:C)的数字表示尚未与我们的要求

620 (3:1:a)和(3:1:b)关联起来。现在，(3:1:a)显然得到了满足：它只是单调性的另一个表达方式，这是由(A:B)提供的。然而，(3:1:b)的成立有待证明。

我们将集中满足所有这些要求。这一过程将基本遵循第一点说明中暗示的一个过程，不过，在具体做的过程中，第二点说明中的要求和结果的惟一性也将得到证明。

我们从证明一组引理开始，这更体现第二点说明和惟一性探索的精神。然而，为了向第一点说明中的目标迈进，它也是基本的。

(A:D) 如上，令 u_0, v_0 是：u_0, v_0 是固定的，$u_0 < v_0$。对区间 $u_0 < w < v_0$ 中的所有 w，定义数值函数 $f(w) = f_{u_0, v_0}(w)$ 如下：

(i) $f(u_0) = 0$。

(ii) $f(v_0) = 1$。

(iii) 对于 $w \neq u_0, v_0$，即 $u_0 < w < v_0$，$f(w)$ 是数 α，$0 < \alpha < 1$，它对应着(A:B)和(A:C)意义上的 w。

(A:E) 映射

$$w \to f(w)$$

具有如下性质:

(i′)它是单调的。

(ii′)对于 $0<\beta<1$ 和 $w \neq u_0$,

$$f[(1-\beta)u_0+\beta w]=\beta f(w)。$$

(iii′)对于 $0<\beta<1$ 和 $w \neq v_0$,

$$f[(1-\beta)v_0+\beta w]=1-\beta+\beta f(w)。$$

(A:F) $w(u_0 \leqq w \leqq v_0)$到任意数集的一个映射,如果它有性质(i)、(ii)和(ii′)或(iii′),那么,该映射等同于(A:D)中的映射。

证明:(A:D)是一个定义,我们必须证明的是(A:E)和(A:F)。

(A:E)的证明:(i′):对于 $u_0<w<v_0$,由(A:B),该映射是单调的。这个区间中的所有的 w 都被映射为 >0, <1 的数,即映射为大于 u_0 的像,小于 v_0 的像。所以,我们有整个区间 $u_0 \leqq w \leqq v_0$ 上的单调性。

关于(ii′):对于 $w=v_0$:这个说法是 $f[(1-\beta)u_0+\beta v_0]=\beta$,且这与(A:B)中的定义相同(用 β 替换 α)。

对于 $w \neq v_0$,即 $u_0<w<v_0$:令 $f(w)=\alpha$,即,按照(A:B)

$$w=(1-\alpha)u_0+\alpha v_0。$$

那么,由(3:C:b)[用 v_0、u_0、β、α 替换 u、v、α、β,并利用(3:C:a)]

$$\begin{aligned}(1-\beta)u_0+\beta w &= (1-\beta)u_0+\beta[(1-\alpha)u_0+\alpha v_0] \\ &= (1-\beta\alpha)u_0+\beta\alpha v_0。\end{aligned}$$

因此,(A:B)给出 $f[(1-\beta)u_0+\beta w]=\beta\alpha=\beta f(w)$。

关于(iii′):对于 $w=u_0$:这个说法等于 $f[(1-\beta)v_0+$

$\beta u_0] = 1-\beta$，而且，这与(A:B)中的定义相同[用 $1-\beta$ 替换 α 并利用(3:C:a)]。

621 对于 $w \neq u_0$，即 $u_0 < w < v_0$：令 $f(w) = \alpha$，即，根据(A:B)

$$w = (1-\alpha)u_0 + \alpha v_0。$$

这样，根据(3:C:b)[用 u_0、v_0、β、$1-\alpha$ 替换 u、v、α、β 并利用(3:C:a)]，

$$\begin{aligned}(1-\beta)v_0 + \beta w &= (1-\beta)v_0 + \beta[(1-\alpha)u_0 + \alpha v_0] \\ &= \beta(1-\alpha)u_0 + [1-\beta(1-\alpha)]v_0,\end{aligned}$$

从而，(A:B)给出我们希望的

$$\begin{aligned}f[(1-\beta)v_0 + \beta w] &= 1-\beta(1-\alpha) = 1-\beta+\beta\alpha \\ &= 1-\beta+\beta f(w)。\end{aligned}$$

(A:F)的证明：考虑映射

(A:1) $$w \to f_1(w)$$

它满足(i)、(ii)和(ii′)或(iii′)。映射

(A:2) $$w \to f(w)$$

是 $u_0 \leqq w \leqq v_0$ 到 $0 \leqq \alpha \leqq 1$ 的一个单调映射，从而它是可逆的：

(A:3) $$\alpha \to \psi(\alpha)。$$

现在，结合(A:1)和(A:3)，即(A:2)的逆映射：

(A:4) $$\alpha \to f_1[\psi(\alpha)] = \varphi(\alpha)。$$

因为(A:1)和(A:2)对满足(i)、(ii)，对于(A:4)，我们有：

(A:5) $$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi(1) = 1。$$

如果(A:1)满足(ii′)或(iii′)，那么，由于(A:2)同时满足(ii′)和(iii′)，对于(A:4)，我们有：

(A:6) $$\varphi(\beta\alpha) = \beta\varphi(\alpha),$$

或

(A:7) $$\varphi(1-\beta+\beta\alpha) = 1-\beta+\beta\varphi(\alpha)。$$

现在,在(A:6)中令 $\alpha=1$ 并利用(A:5)给出

(A:8) $$\varphi(\beta)=\beta,$$

而且,(A:7)中令 $\alpha=0$ 并利用(A:5)给出 $\varphi(1-\beta)=1-\beta$。β 换成 $1-\beta$ 再次给出(A:8)。

所以,(A:8)总是成立的。(ii′)、(iii′)将其限制为满足 $0<\beta<1$ 的 β。然而,(A:5)将其扩展到 $\beta=0,1$,即扩展到满足 $0\leqq\beta\leqq 1$ 的所有 β。考虑到 $\varphi(\alpha)$ 的定义,由(A:3)、(A:4)和(A:8)的一般成立表达的是(A:1)和(A:2)的等同,这恰好是我们要证明的结果。

(A:G) 如上,令 u_0、v_0 固定不变,且 $u_0<v_0$。再令 α_0、β_0 是给定的,而且满足 $\alpha_0<\beta_0$。对于区间 $u_0\leqq w\leqq v_0$ 上的所有 w,定义数值函数 $g(w)=g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(w)$ 如下:

$$g(w)=(\beta_0-\alpha_0)f(w)+\alpha_0$$

[根据$(A:D)$,$f(w)=f_{u_0,v_0}(w)$]。

我们注意到: 622

(i) $g(u_0)=\alpha_0$,

(ii) $g(v_0)=\beta_0$。

(A:H) 映射

$$w\rightarrow g(w)$$

具有如下性质:

(i′)它是单调的。

(ii′)对于 $0<\beta<1$ 且 $w\neq u_0$

$$g[(1-\beta)u_0+\beta w]=(1-\beta)\alpha_0+\beta g(w)。$$

(iii′)对于 $0<\beta<1$ 且 $w\neq v_0$,

$$g[(1-\beta)v_0+\beta w]=(1-\beta)\beta_0+\beta g(w)。$$

(A:I)　　满足 $u_0 \leqq w \leqq v_0$ 的全部 w 到任一数集的一个映射,如果它具有性质(i)、(ii)和(ii′)或(iii′),那么,它等同于(A:G)中的映射。

证明:利用函数[$f_1(w)$ 与 $g_1(w)$ 以及 $f(w)$ 与 $g(w)$]之间的对应关系

$$g_1(w) = (\beta_0 - \alpha_0) f_1(w) + \alpha_0,$$

或与之等价的

$$f_1(w) = \frac{g_1(w) - \alpha_0}{\beta_0 - \alpha_0}。$$

(A:G)—(A:I)就变成了(A:D)—(A:F)。因此(A:G)—(A:I)得自(A:D)—(A:F)。

(A:J)　　假设(A:G)中的(i)、(ii),有 $u = u_0, v \neq u_0$ 的方程

$$g(1-\beta)u + \beta v = (1-\beta) g(u) + \beta g(v)$$

$(u_0 \leqq u < v \leqq v_0)$ 等价于(A:I)中的(ii′);而且当 $u \neq v_0, v = v_0$ 时,它等价于(A:I)中的(iii′)。

证明:(ii′)的证明:用 u_0、w、β 替换 u、v、β 即可。

(iii′)的证明:用 w、v_0、$1-\beta$ 替换 u、v、β 即可。

A.2.3.　在(A:G)—(A:J)中,效用区间 $u_0 \leqq w \leqq v_0$ 到一个数区间 $\alpha_0 \leqq \alpha \leqq \beta_0$ 的映射已经被给出了其技术上的充分形式,有着必要的惟一性。现在,我们能够把各种各样的映射

$$w \to g(w) = g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}(w)$$

组装起来。

(A:K)　　考虑 $g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}$ 和一个满足 $u_0 \leqq w_0 \leqq v_0$ 的 w_0。令

$$\gamma_0 = g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}(w_0)。$$

那么,$g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(w)$ 与 $g_{u_0,w_0}^{\alpha_0,\gamma_0}(w)$ 在后者的定义域 $u_0 \leqq w \leqq w_0$(如果 $w_0 \neq u_0$,即 $u_0 < w_0$)中相同,而且 $g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(w)$ 与 $g_{u_0,v_0}^{\gamma_0,\beta_0}$ 在后者的定义域 $w_0 \leqq w \leqq v_0$(如果 $w_0 \neq v_0$,即 $w_0 < v_0$)中相同。 623

证明:关于 $g_{u_0,w_0}^{\alpha_0,\gamma_0}(w)$:对于 α_0、γ_0、u_0、w_0,$g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(w)$ 具有性质[(A:G)和(A:H)的](i)、(ii′),因为它们与关于 α_0、β_0、u_0、v_0 的那些式子相同(因为它们只涉及下端 α_0 和 u_0)。对于 α_0、γ_0、u_0、w_0,它还有性质[(A:G)的](ii),因为 $g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(w)=\gamma_0$。因此,根据(A:Ⅰ),我们有 $g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}$ 在 $u_0 \leqq w \leqq w_0$ 之内满足 $g_{u_0,w_0}^{\alpha_0,\gamma_0}$ 的一个惟一特征。

关于 $g_{u_0,w_0}^{\alpha_0,\gamma_0}(w)$:对于 γ_0、β_0、w_0、v_0,$g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(w)$ 有[(A:G)和(A:H)的]性质(ii)和(iii′),因为它们与 α_0、β_0、u_0、v_0 时的那些式子相同(因为它们只涉及上端点 β_0 和 v_0)。对于 γ_0、β_0、w_0、v_0,它还有[(A:G)的]性质(i),因为 $g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(w_0)=\gamma_0$。所以,(A:Ⅰ)给出,$g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}$ 在 $w_0 \leqq w \leqq v_0$ 内满足 $g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\gamma_0}$ 的一个惟一特征描述。

(A:L) 考虑 $g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}$ 和满足 $u_0 \leqq u_1 < v_1 \leqq v_0$ 的 u_1、v_1。令 $\alpha_1 = g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(u_1)$,$\beta_1 = g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(v_1)$。那么,$g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(w)$ 与 $g_{u_1,v_1}^{\alpha_1,\beta_1}(w)$ 在后者的定义域 $u_1 \leqq w \leqq v_1$ 内相同。

证明:首先,把(A:K)应用于 $g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}$ 和 $g_{u_0,v_1}^{\alpha_0,\beta_1}$[即用 u_0、v_0、α_0、β_0、v_1、β_1 替换 u_0、v_0、α_0、β_0、w_0、γ_0,并记 $\beta_1 = g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(v_1)$]——这表明,$g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(w)$ 与 $g_{u_0,v_1}^{\alpha_0,\beta_1}(w)$ 在后者的定义域 $u_0 \leqq w \leqq v_1$ 内相同。接着,把(A:K)应用于 $g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}$ 和 $g_{u_0,v_1}^{\alpha_0,\beta_1}$[即用 u_0、v_1、α_0、β_1、u_1、α_1 替换 u_0、v_0、β_0、w_0、γ_0;记 $\alpha_1 = g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(u_1) = g_{u_0,v_1}^{\alpha_0,\beta_1}(u_1)$]——这表明,$g_{u_0,v_1}^{\alpha_0,\beta_1}(w)$ 和 $g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(w)$ 与

$g^{\alpha_1,\beta_1}_{u_1,v_1}(w)$在后者的定义域 $u_0 \leqq w \leqq v_1$ 内相同。

(A:L)必须与第二条推理线路结合在一起。这里，我们还假设已经选定两个数 u^*、v^* 满足 $u^* < v^*$；从此以后直到我们得到(A:V)和(A:W)，我们将视其为给定的。

下面，我们要证明：

(A:M) 如果 $u_0 \leqq u^* < v^* \leqq v_0$，那么，存在惟一一个 $g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w)$，使得

(i) $g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(u^*) = 0$，

(ii) $g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(v^*) = 1$。

我们把 $g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w)$ 记为 $h_{u_0,v_0}(w)$。

证明：构造(A:D)的 $f(w) = f_{u_0,v_0}(w)$。由于 $u^* < v^*$，所以 $f(u^*) < f(v^*)$。对于变量 α_0，β_0，(A:G)给出 $g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w) = (\beta_0 - \alpha_0)f(w) + \alpha_0$。从而，上述(i)、(ii)意味着，$(\beta_0 - \alpha_0)f(u^*) + \alpha_0 = 0$，$(\beta_0 - \alpha_0)f(v^*) + \alpha_0 = 1$，且这两个方程惟一

624 地决定 α_0，β_0。[①] 所以，期望中的 $g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w)$存在且惟一。

(A:N) 如果 $u_0 \leqq u_1 \leqq u^* \leqq v^* \leqq v_1 \leqq u_1$，那么，$h_{u_0,v_0}(w)$ 与 $h_{u_1,v_1}(w)$在后者的定义域 $u_1 \leqq w \leqq v_1$ 中相同。

证明：令 $\alpha_1 = h_{u_0,v_0}(u_1)$，$\beta_1 = h_{u_0,v_0}(v_1)$。那么，由(A:L)，$h_{u_0,v_0}(w)$与 $g^{\alpha_1,\beta_1}_{u_1,v_1}(w)$在后者的定义域 $u_1 \leqq w \leqq v_1$ 中一致。将此应用于 $w = u^*$ 和 $w = v^*$ 给出，$g^{\alpha_1,\beta_1}_{u_1,v_1}(u^*) = h_{u_0,v_0}(u^*) = 0$ 和 $g^{\alpha_1,\beta_1}_{u_1,v_1}(v^*) = h_{u_0,v_0}(v^*) = 1$。从而，由(A:M)，$g^{\alpha_1,\beta_1}_{u_1,v_1}(w) = h_{u_1,v_1}(w)$。所以，$h_{u_0,v_0}(w)$与 $h_{u_1,v_1}(w)$在后者的定

---

① $\alpha_0 = -\dfrac{f(u^*)}{f(v^*) - f(u^*)}$，$\beta_0 = \dfrac{1 - f(u^*)}{f(v^*) - f(u^*)}$。——623，①

义域 $u_1 \leqq w \leqq v_1$ 内相同。

现在，我们能够建立这样一个重要事实：函数 $h_{u_0,v_0}(w)$ 全部组装成一个函数。具体来说：

(A:O) 任意给定一个 w，有可能选择 u_0, v_0 使得 $u_0 \leqq u^* < v^* \leqq v_0$ 且 $u_0 \leqq w \leqq v_0$。对于 u_0, v_0 的这些选择，$h_{u_0,v_0}(w)$ 具有相同的值。也就是说 $h_{u_0,v_0}(w)$ 仅仅依赖于 w。我们将其记为 $h(w)$。

证明：u_0、v_0 的存在性：$u_0 = \mathrm{Min}(u^*, w)$ 且 $v_0 = \mathrm{Max}(v^*, w)$ 显然具有如下性质：

$h_{u_0,v_0}(w)$ 仅仅依赖于 w：选择两个数对 u_0, v_0 和 u'_0, v'_0：$u_0 \leqq u^* < v^* \leqq v_0$，$u_0 \leqq w \leqq v_0$ 且 $u'_0 \leqq u^* < v^* \leqq v'_0$，$u'_0 \leqq w \leqq v'$。令 $u_1 = \mathrm{Max}(u_0, u'_0)$，$v_1 = \mathrm{Min}(v_0, v'_0)$。那么，$u_0 \leqq u_1 \leqq u^* < v^* \leqq v_1 \leqq v_0$，$u_1 \leqq w \leqq v_1$，且 $u'_0 \leqq u_1 \leqq u^* < v^* \leqq v_1 \leqq v'_0$，$u_1 \leqq w \leqq v_1$。现在，(A:N) 的两次应用（第一次有 u_0, v_0, u_1, v_1, w，第二次有 u'_0, v'_0, u_1, v_1, w）给出，$h_{u_0,v_0}(w) = h_{u_1,v_1}(w)$ 且 $h_{u'_0,v'_0}(w) = h_{u_1,v_1}(w)$。

故

$$h_{u_0,v_0}(w) = h_{u'_0,v'_0}(w)。$$

A.2.4 (A:O) 的函数 $h(w)$ 是就所有效用定义的，而且它有数字值。下面，我们将不怎么费力地证明，它具有我们需要的所有性质。

最容易的做法是借助两个辅理来证明。

(A:P) 任意给定满足 $u < v$ 的 u, v，存在 u_0, v_0，满足 $u_0 \leqq u^* < v^* \leqq v_0$，$u_0 \leqq u < v \leqq v_0$。

证明：令 $u_0 = \mathrm{Min}(u^*, u)$，$v_0 = \mathrm{Max}(v^*, v)$。

(A:Q) 对任意给定的满足 $u < v$ 的 u, v，令 $h(u) = \alpha$，

$h(v)=\beta$。那么，$\alpha<\beta$，而且 $h(w)$ 与 $g_{u,v}^{\alpha,\beta}(w)$ 在后者的定义域 $u\leqq w\leqq v$ 中等同。

证明：如（A：P）指出的那样选择 u_0，v_0。由（A：M），$h_{u_0,v_0}(w)$ 是一个 $g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(w)$，有着适宜的 α_0 和 β_0。根据（A：O），$h(w)$ 与 $h_{u_0,v_0}(w)$，即 $g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(w)$ 在后者的定义域 $u_0\leqq$
625 $w\leqq v_0$ 中等同。将此应用于 $w=u$ 和 $w=v$ 给出，$g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(u)=h(u)=\alpha$ 和 $g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(v)=h(v)=\beta$。由于 $g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(w)$ 是单调的，这意味着 $\alpha<\beta$。接下来，由（A：L）（用 u_0、v_0、α_0、β_0、u、v、α、β 替换 u_0、v_0、α_0、β_0、u_1、v_1、α_1、β_1），$g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(w)$ 与 $g_{u,v}^{\alpha,\beta}(w)$ 在后者的定义域 $u\leqq w\leqq v$ 中相同等同。所以，这对于 $h(w)$ 来说同样成立。

有了这些准备工作，我们证明 $h(w)$ 的相关性质。

（A：R）　从所有的 w 到一个数集的映射

$$w\rightarrow h(w)$$

有如下性质：

(i) $h(u^*)=0$。

(ii) $h(v^*)=1$。

(iii) $h(w)$ 是单调的，

(iv) 对于 $0<\gamma<1$ 和 $u<v$。

$$h[(1-\gamma)u+\gamma v]=(1-\gamma)h(u)+\gamma h(v)。$$

（A：S）　具有性质（i）、（ii）和（iv）的从所有 w 的到任一数集的映射等同于（A：R）的映射。

证明：（A：R）的证明：（i）、（ii）的证明：直接得自（A：O）和（A：M）。

（iii）的证明：包含在（A：Q）之中。

（iv）的证明：根据（A：P）选择 u、v，然后根据（A：Q）选

择 α、β 和 $g_{u,v}^{\alpha,\beta}(w)$。这样,由(A:H)和(ii′)(用 u、v、v、γ 替换 u_0、v_0、w、γ),$g_{u,v}^{\alpha,\beta}[(1-\gamma)u+\gamma v]=(1-\gamma)g_{u,v}^{\alpha,\beta}(u)+\gamma g_{u,v}^{\alpha,\beta}(v)$。从而,由(A:Q)

$$h[(1-\gamma)u+\gamma v]=(1-\gamma)h(u)+\gamma h(v)。$$

(A:S)的证明:考虑所有的效用的到数的一个映射

$$w\to h_1(w)。$$

它满足(i)、(ii)和(iv)。选择 u_0,v_0 满足 $u_0\leqq u^*\leqq v^*\leqq v_0$,且令 $\alpha_0=h_1(u^*)$,$\beta_0=h_1(v^*)$。那么,由(A:I),$h_1(w)$ 与 $g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(w)$ 在后者的定义域 $u_0\leqq w\leqq v_0$ 内等同。令 $w=u^*$ 和 $w=v^*$,我们得到 $g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(u^*)=h(u^*)=0$,$g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(v^*)=h_1(v^*)=1$。从而,由(A:M),$g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}$ 是 h_{u_0,v_0}。因此,$h_1(w)$ 与 $h_{u_0,v_0}(w)$,即 $h(w)$,在 $u_0\leqq w\leqq v_0$ 内等同。由(A:O),这意味着,$h_1(w)$ 和 $h(w)$ 完全相同。

A.2.5 (A:R)和(A:S)给出从效用到数的一个映射,它具有合理的性质,而且这些性质惟一地刻画了其特征,从而,我们本可以到此为止。然而,我们并不满足于 626
此,理由是:(A:R)中的特征化描述并不等同于(3:1:a)和(3:1:b)的描述,在(iv)中,(A:R)走得没那么远[(3:1:b)中,这是就所有的 u、v 假定的;在(iv)中,仅仅就 $u<v$ 假定了这一点];而且,它在(i)、(ii)中引入了一个随意的(意思是 u^*、v^* 的随意性)正规化。后面,我们将去除这些不协调之处。事实上,这是容易做到的。

我们首先扩展(A:R)中的(iv)。

(A:T) $(1-\gamma)u+\gamma u=u$ 总是成立。

证明:$u\lessgtr(1-\gamma)u+\gamma u$ 的意思是,γ 属于类Ⅰ或类Ⅱ。如 γ 属于类Ⅰ或Ⅱ且如果 $0<\beta<1$,那么,由(3:B:a)

和(3:B:b),

$$u \leqslant (1-\beta)u+\beta[(1-\gamma)u+\gamma u] \leqslant (1-\gamma)u+\gamma u。$$

对于 γ 分别属于类Ⅰ或Ⅱ:第一,用 u、$(1-\gamma)u+\gamma u$ 和 $1-\beta$ 替换(3:B:a)或(3:B:b)中的 u、v 和 α。第二,用 $(1-\gamma)u+\gamma u$、u 和 β 替换(3:B:b)或(3:B:a)中的 u、v 和 α。根据(3:C:a)和(3:C:b)(用 u、u、β、γ 替换 u、v、α、β),

$$(1-\beta)u+\beta[(1-\gamma)u+\gamma u]=(1-\beta\gamma)u+\beta\gamma u。$$

因此,$u \leqslant (1-\beta\gamma)u+\beta\gamma u \leqslant (1-\beta)u+\beta u$。令 $\delta=\beta\gamma$。由于 β 在 $0<\beta<1$ 内不受约束,从而 δ 在 $0<\delta<\gamma$ 内不受约束。假设 $0<\gamma<1,0<\delta<1$,我们有:

(A:9) 如果 γ 属于类Ⅰ或Ⅱ,那么,每个 $\delta<\gamma$ 也都属于同一个类Ⅰ或Ⅱ。

(A:10) 在(A:9)的条件下,分别有

$$(1-\delta)u+\delta u \leqslant (1-\gamma)u+\gamma u。$$

如果用 $1-\gamma$ 替换 γ,表达式 $(1-\gamma)u+\gamma u$ 并不发生变化。由于 $1-\gamma<1-\delta$ 等价于 $\gamma>\delta$,我们能够在(A:9)中用 $1-\gamma$ 和 $1-\delta$ 替换 γ 和 δ。这样,(A:9)和(A:10)变成:

(A:11) 如果 γ 属于类Ⅰ或Ⅱ,那么,每个 $\delta>\gamma$ 属于同一个类Ⅰ或Ⅱ。

(A:12) 在条件(A:11)下,分别有

$$(1-\delta)u+\delta u \leqslant (1-\gamma)u+\gamma u。$$

(A:9)和(A:11)表明,如果 γ 属于类Ⅰ或Ⅱ,那么,每个 δ($<\gamma$ 或 $=\gamma$ 或 $>\gamma$)属于同一个类Ⅰ或Ⅱ。也就是说,如果类Ⅰ或Ⅱ都不是空集,那么,它包含所有 δ,$0<\delta<1$。假设(对于类Ⅰ或Ⅱ来说)情况的确如此,且考虑 γ,δ,

$\gamma<\delta$。那么,根据(A:10),$(1-\delta)u+\delta u\leqslant(1-\gamma)u+\gamma u$;而且,根据(A:12)(用$\delta$、$\gamma$替换$\gamma$、$\delta$),$(1-\delta)u+\delta u\leqslant$ 627
$(1-\gamma)u+\gamma u$。因此,无论如何,$(1-\delta)u+\delta u\leqslant(1-\gamma)u+\gamma u$中的<和>都成立。这是一个矛盾。故,这类I和II都必定是空集。

所以,$u\leqslant(1-\gamma)u+\gamma u$永远不会成立,即$(1-\gamma)u+\gamma u=u$总成立。

(A:U) $h[(1-\gamma)u+\gamma v]=(1-\gamma)h(u)+\gamma h(v)$
总成立
$(0<\gamma<1$,任意的$u,v)$。

证明:对于$u<v$,这正是(A:R)和(iv)。对于$u>v$,它是(A:R)中令v、u、$1-\gamma$替换u、v、γ的结果。对于$u=v$,它得自(A:T)。

下面,我们要以理想的形式证明存在性和惟一性定理,即与(3:1:a)和(3:1:b)对应起来。这里,我们还将放弃假设的$u^{\bullet}$、$v^{\bullet}$的固定选择,它是我们在(A:M)前面引入的。

(A:V) 存在一个从所有的w到一个数集的映射$w\rightarrow \mathrm{v}(w)$。

该映射具有如下性质:

(i)单调性。

(ii)对于$0<\gamma<1$和任意的u,v,

$$\mathrm{v}[(1-\gamma)u+\gamma v]=(1-\gamma)\mathrm{v}(u)+\gamma\mathrm{v}(v)。$$

(A:W) 对于有性质(i)和(ii)的任意两个映射$\mathrm{v}(w)$和$\mathrm{v}'(w)$,我们有:

$$\mathrm{v}'(w)=\omega_0\mathrm{v}(w)+\omega_1,$$

其中 ω_0、ω_1 是适宜的常数且 $\omega_0>0$。

证明：令 u^*、v^* 是两个不同的效用[①]，$u^* \leqq v^*$。

如果 $u^*>v^*$，那么，对换 u^* 和 v^*。因此，总有 $u^*<v^*$。用 u^*，v^* 构造 $h(w)$，即(A:L)—(A:U)。接下来，我们证明：

(A:V)：根据(A:R)，映射

$$w\rightarrow h(w)$$

满足(i)；根据(A:U)，它满足(iii)和(ii)。

(A:W)：首先考虑 $\mathrm{v}(w)$。由(*i*)，$\mathrm{v}(u^*)<\mathrm{v}(v^*)$。令

$$h_1(w)=\frac{\mathrm{v}(w)-\mathrm{v}(u^*)}{\mathrm{v}(v^*)-\mathrm{v}(u^*)}。$$

628 这样，$h_1(w)$ 自动满足(A:R)中的(i)和(ii)，并根据(i)和(ii)而满足(A:R)中的(iii)和(iv)。因此，根据(A:S)，$h_1(w)=h(w)$，即

(A:13) $$\mathrm{v}(w)=\alpha_0 h(w)+\alpha_1,$$

其中，α_0、α_1 是固定的数：$\alpha_0=\mathrm{v}(v^*)-\mathrm{v}(u^*)>0$，$\alpha_1=\mathrm{v}(u^*)$。

类似地，对于 $\mathrm{v}'(w)$：

(A:14) $$\mathrm{v}'(w)=\alpha'_0 h(w)+\alpha'_1,$$

其中，α'_0、α'_1 是固定的数：$\alpha'_0=\mathrm{v}'(v^*)-\mathrm{v}'(u^*)>0$，$\alpha'_1=\mathrm{v}(u^*)$。

这样，(A:13)和(A:14)合起来给出

---

① 严格地说，这些公理允许不存在两个不同效用的情况。这种可能性几乎没有什么意义，不过，也很容易解决。如果不存在两个不同的效用，那么，它们的个数是零或一。在前一种情况下，我们的断言空泛地得到满足。假如是第二种情况：存在惟一一个效用 w_0。一个函数只是一个常数 $\mathrm{v}(w_0)=\alpha_0$。任何这类函数都满足(A:V)中的(i)，(ii)。在(A:W)中，令 $\mathrm{v}(w)=\alpha_0$，$\mathrm{v}'(w)=\alpha'_0$，选择 $\omega_0=1$，$\omega_1=\alpha'_0-\alpha_0$。——627，①

(A:15) $$v'(w)=\omega_0 v(w)+\omega_1,$$

其中,ω_0、ω_1 是固定的数:$\omega_0=\frac{\alpha'_0}{\alpha_0}$,$\omega_1=\frac{\alpha_0\alpha'_1-\alpha_1\alpha'_0}{\alpha_0}$。这正是我们希望的结果。

A.3 总结说明

A.3.1 (A:V)和(A:W)显然是3.5.1中要求的存在性和惟一性定理。所以,3.5—3.6的断言完全得到了证明。

这里,我们建议读者重新阅读3.3和3.8那样的效用概念分析及其数字解释的分析。我们要重新强调两点,这两点已经在那里考虑到了或至少提到了。

A.3.2 第一点是关于我们的过程与互补性概念之间的关系。像(3:1:b)那样的简单可加性公式就似乎表明,关于我们将其效用相加的物品,我们假设这些物品之间没有互补性。要认识到的重要一点是,我们只是在这样一种情况下才这么做,其中,的确能够存在非互补性。正如我们在3.3.2的第一部分指出过的那样,我们的 u,v 不是确定数量的——且可能与之共存的——物品或服务的效用,而是想像中的事件的效用。(3:1:b)的 u,v 尤其指想像中的互为备择的事件 u,v,只有其中之一能够且将变成现实。也就是说,(3:1:b)对付的是,要么(以概率 α)有 u,要么(以余下的概率 $1-\alpha$)有 v——但是,由于两者不可能被想像为同时出现,它们也就不可能在普通意义上互补。

应该指出的是，当互补性这一概念能够合理地应用时，博弈理论的确提供了对付它的充分方法：在计算（一个 n 人博弈中的）一个联盟 S 的值 $v(S)$ 时，如第25节中描述的那样，物品或服务之间所有可能的互补方式必须被考虑进去。另外，公式（25:3:c）表达的是，联盟 $S\cup T$ 的值有
629 可能大于其成分 S 和 T 的值的和，从而，它表达了联盟 S 的成员的服务与联盟 T 的成员的服务之间可能有的互补性。（见27.4.3。）

A.3.3 第二点说明涉及的是这样一个问题：我们的方法是否迫使一个人同样评价等量（货币）损失和收益呢？它是否允许给予赌博（即便期望值是0）等一个效用或负效用呢？在3.7.1的最后一部分，我们已经触及这些问题（也可参见下面的脚注②和③）。然而，更多和更具体的说明也许是有益的。

考虑下面的例子：贝奴里建议（见第28页脚注②），一笔货币收益 dx 的效用非但不应该与收益 dx 成比例，而且（假设这笔收益是无穷小量——即渐近地十分小的收益 dx）与其所有者的用货币表达的总财富额 x 成反比。因此，使用适宜的效用单位），这笔收益的效用是 $\frac{dx}{x}$。拥有 x_1 比拥有 x_2 多出的效用是 $\int_{x_2}^{x_1}\frac{dx}{x}=\ln\frac{x_1}{x_2}$。得到（确定的）数额 η 比失去同样数额多出的效用是 $\ln\frac{x+\eta}{x}-\ln\frac{x}{x-\eta}=\ln\left(1-\frac{\eta^2}{x^2}\right)$。这是小于0的，即等量收益与等量损失相比，人们对后者感受更强烈。一个50%—50%的等风险赌博肯定是不利的。

然而,贝奴里的效用满足我们的公理并服从我们的结果:不过,拥有 x 单位货币的效用与 $\ln x$ 成比例,却不与 x 成比例![①②]

因此,(此种情况下,基本上由我们的公理惟一地决定的)一个恰当的效用定义消除了赌博的特殊效用或负效用,但初看时它是存在的。

我们强调了贝奴里效用,不是因为我们认为它有什么特殊的意义,或比其他效用更接近现实。我们的惟一目的是要证明,数字效用的使用不一定非要假设等货币风险的50%—50%赌博等必须被当作是可有可无的。[③]

这形成了描述这样一个系统的更为深刻的问题,在这个系统中,赌博在任何条件下都有确定的效用或负效用,其中,可以计算数学期望的数字效用无法以任何过程直接或间接定义。在这样一个系统中,我们的某些公 630
理肯定不成立。此时,难以看出哪些公理最有可能经受住这一修改。

A.3.4　不管怎样,有些结果在这方面是不言自明的。

第一:公理(3:A)——或更具体地说,(3:A:a)——表达的是全部效用的排序的完备性,即个人偏好系统的完

---

① 上述等风险50%—50%赌博是就 x 而言的,而不是就 $\ln x$ 而言的。——629,①

② x 单位货币的效用也许是可度量的,但不与 x 成比例。这是我们在第18页脚注③中指出过的。——629,②

③ 正如3.7.3中说明(1)中指出的那样,我们正在忽略几个人之间的效用转移。本书其他地方使用的较严格的观点,尤其如2.1.1中描述的那样,的确迫使一个人假设效用与货币度量之间成比例。然而,在目前阶段的讨论中,这是没有意义的。——629,③

备性。十分值得怀疑的是，视这一公设成立的现实理想化是否恰当或甚至方便。也就是说，一个人也许需要允许具有不可比关系的两个效用 u、v，记为 $u \parallel v$，它意味着 $u=v$，$u>v$，$u<v$ 都不成立。应该注意的是，当今的无差异曲线方法并非严格对应着这一可能性。事实上，在那种情况下，“$u>v$，$u<v$ 都不成立”对应着“$u=v$ 或 $u \parallel v$”，记为 $u \approx v$，能够被当作效用相等概念的延伸（见 A.1.2 中有关效用相等的说明）。

因此，如果 $u \parallel u'$，$v \parallel v'$，那么，在任何关系中，u'、v'都能够取代 u、v，例如，在这种情况下，$u<v$ 就意味着 $u'<v'$。尤其是，$u \parallel u'$和 $v=v'$有这一结果。$u=u'$和 $v \parallel v'$也有这一结果。也就是说，分别用 v、w、u 记 u、v、u'且用 u、v、w 记 u、v、v'：

（A:16）　　　　$u \parallel v$ 和 $v<w$ 意味着 $u<w$。

（A:17）　　　　$u<v$ 和 $v \parallel w$ 意味着 $u<w$。

然而，对于真正有意义半排序系统情况，（A:16）和（A:17）都不成立。（例如，见 65.3.2 末尾的第二个例子，第 590 页脚注②也涉及到这个例子，那里指出了其与效用概念的联系。这是一个平面的排序，所以，$u>v$ 意味着 u 比 v 有更大的纵坐标和横坐标。）

第二：在（3:B）中，公理（3:B:a）和（3:B:b）表达的是单调性，这个性质是很难去掉的。公理（3:B:c）和（3:B:d）则表达的是几何公理中众所周知的阿基米德性质：无论效用 v 大于（或小于）效用 u 多少，也无论效用 w 大于（或小于）效用 u 多少，如果 v 被以一个充分小的概率与 u 混合起来，那么，u 减去这一混合所得差都将小于 u 减去 w 所得

差。在任何条件下，我们大概都希望有这个性质，因为将其去掉就等于引入无穷的效用差。①

这里，下述结果也是值得做出的：任意给定一个完备排序的效用系统 U，它不允许事件与概率的结合，而且其中效用不是数字效用。（例如，基于无差异曲线给出的排序的系统。如第一点说明中指出的那样，通过扩展相等的概念——即视我们在那里引入的 $u \approx v$ 为相等。在这种情况下，$u \approx v$ 意味着 u 和 v 位于同一条无差异曲线上。）这一排序的完备性可以得到。现在，引入带有概率的事件。这意味着，我们引入了分别有概率 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$（$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \geqq 0$，$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$）的 n（$=1,2\cdots$）个事件的组合。 631

这要求引入相应的（象征性的）效用组合 $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$（$u_1, \cdots, u_n$ 属于 U）。对这些 $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$（任意 $n = 1, \cdots$ 和任意 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，且 $u_1, \cdots, u_n$ 满足上述条件）进行完备排序

---

① 关于在几何学的一个公理化中，阿基米德性质的一个表述，其出处见第74页脚注①中提到的希尔伯特的著作。见那里的公理 V.1。阿基米德性质一直广泛用于数字系统和代数系统的公理化。

我们对待阿基米德性质的方式略微不同于我们提到的大多数文献中的方式。我们自由使用实数的概念，而在上述文献中这通常是忌讳的。因此，传统方法是通过逐次加上“较小的”来“增大”“较大的”量（例如，见希尔伯特著作中的方法），而我们通过一个适当的小数与“较大的”东西（我们例子中 v 和 u 之间的效用差）相乘（我们例子中的 α 倍）来“缩小”“较小的”东西（我们的例子中 w 和 u 之间的效用差）。

处理方法上的这一差别完全是技术性的，并不影响概念上的情况。读者将会注意到，我们正在谈论“v 多于 u 的剩余”或“u 多于 v 的剩余”或（两者结合起来）“u 和 v 之间的差”（u、v 是效用）之类的东西。这只是为了便于文字讨论——它们不是我们的严格公理系统的组成部分。——630，①

是可能的，而且不用将其变成数字——如果这一排序可以不是阿基米德排序。事实上，比较 $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ 和 $\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m$，我们可以假设 $n = m$ 且 $u_1, \cdots, u_n$ 与 $v_1, \cdots, v_m$ 相同（写成 $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + 0v_1 + \cdots + 0v_m$ 和 $0u_1 + \cdots + 0u_n + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m$，然后把 $n + m; u_1, \cdots, u_n; v_1, \cdots, v_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_n, 0, \cdots, 0; 0, \cdots, 0, \beta_1, \cdots, \beta_m$ 换成 $n; u_1, \cdots, u_n; \alpha_1, \cdots, \alpha_n; \beta_1, \cdots, \beta_n$）。然后，我们比较 $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ 和 $\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$。接下来，通过适当置换 $1, \cdots, n$，使 $u_1 > \cdots > u_n$。有了这些准备之后，把 $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n > \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$ 定义为：对于 $\alpha_i \neq \beta_i$ 的最小的 $i(=1,2,\cdots,n)$，如 $i = i_0$，有 $\alpha_{i_0} > \beta_{i_0}$。

显然，这些效用是非数字效用。这里，如果我们设想影响 α_{i_0} 概率的一个小的增加 $\alpha_{i_0} - \beta_{i_0}$，其重要性将超过其余 u_i 的概率的相反增加 $\beta_i - \alpha_i, i = i_0 + 1, \cdots, n$，它们的非阿基米德特征就变得清楚了。（这排除了第 18 页脚注①中那样的准则的应用。）显然，它们破坏了我们的公理（3:B:c）和（3:B:d）。

这样一个非阿基米德排序显然与我们关于效用和偏
632 好的性质的通常想法矛盾。另一方面，如果你想定义包括概率的效用（及其排序）系统，它满足我们的公理（3:A）—（3:C）——且具有阿基米德性质，那么，这些效用就必须是数字效用，因为 A.2 中我们的演绎适用。

第三：有可能，真正关键的一组公理是（3:C）——或更为具体地说，公理（3:C:b）。这一公理表达的是多个机会备择的组合率，而且明显合理的是，如果放弃这一简单的组合率，赌博的特定效用或负效用能够存在。

系统(3:A)—(3:C)的某些变化,在任何程度上包括(3:C:b)的放弃或至少是重大的修改,有可能导致数学上完备的和令人满意的效用计算,它允许赌博的特定效用或负效用。我们希望,实现这一目标的方法将被发现,不过,数学难度似乎很大。当然,这也使得借助纯粹口头讨论来实现一个成功方法的希望变得甚至更为遥远了。

上述说明清楚告诉我们,当今使用的无差异曲线方法无助于克服这些困难,它只不过拓展了相等这一概念(见第一点说明),但是,它不会告诉我们应该如何处理涉及概率的情况,而这类情况与期望效用之间的联系是不可避免的。

人名索引

（索引中所列数字均为英文版页码，即本书中的边页码。罗马数码表示前言部分；阿拉伯数码表示正文部分，后附 ff. 的，表示出现在该页的标题之中。）

阿基米德（Archimedes），630
贝奴里（Bernoulli，D.），28，83，629
伯克霍夫（Birkhoff，G.），62，63，64，66，340，589
伯姆巴沃克（Böhm-Bawerk，E. von），9，562，564，581，582
玻尔（Bohr，N.），148
波尼森（Bonessen，T.），128
波莱尔（Borel，E.），154，186，219
布劳威尔（Brouwer，L. E. J.），154
伯恩赛德（Burnside，W.），256
卡拉西奥德利（Carathéodory，C.），343，384，619
切沃雷（Chevalley，C.），vi
达布罗（D'Abro，A.），148
狄德金（Dedekind），129，619
迪拉克（Dirac，P. A. M.），148
柯南道尔（Doyle，C.），176，178
欧几里得（Euclid），23

芬切尔(Fenchel,W.),128
弗兰克尔(Fränkel,A.),61,595
奥斯多夫(Hausdorff,F.),61.269,595
海森堡(Heisenberg,W.),148
希尔伯特(Hilbert,D.),74,76,630
赫威茨(Hurwicz,L.),vi
卡库塔尼(Kakutani,S.),154
卡普兰斯基(Kaplanski,I.),vi
开普勒(Kepler),4
哥尼(König,D.),60
克罗内克(Kronecker),129
利普希茨(Lipschitz),493
鲁密斯(Loomis,L. H.),vi
麦克雷恩(MacLane,S.),340
马斯查克(Marschak,J.),vi
马修森(Mathewson,L. C),256
门格尔(Menger,C.),564
门格尔(Menger,K.),28,176
莫斯(Mohs),22
摩根斯顿(Morgenstern,O.),176,178
莫尔斯(Morse,M.),95
诺伊曼(Neumann,J. von),1,154,186
牛顿(Newton),4,5,6,33
帕累托(Pareto,V.),18,23,29
斯贝塞(Speiser,A.),256
塔斯基(Tarski,A.),62

丁特纳(Tintner,G.),28
布拉赫(Tycho de Brahe),4
凡勃仑(Veblen,O.),76
维勒(Vile,J.),154,186,198
沃尔德(Wald,A.),v,vi
维尔斯特拉斯(Weierstrass),129
外尔(Weyl,H.),76,128,256
扬(Young,J.W.),76
泽米罗(Zermelo,E.),269,595

[seal stamp]

词 条 索 引

非循环性(acyclicity),589,591,594,595,596,598,600,601,602,603,609

严格非循环性(strict),594,595,597,598,600,601,602,603

值的加性(additivity of value),251,628

敌对发现(adversary"found out"),105

同意(agreements),221,224,sanctity of,223

盟友(ally),221

备择(alternatives),55

备择的个数(number of),69

先前(anteriority),51,52,77,78,112,117,124

分配(apportionment),35,41,504

阿基米德性质(Archimedean property),630,631

指派(assignment)

实际指派(actual),75

指派模式(pattern of),75

非对称性(asymmetric),270,448

奥地利学派(Austrian School),9

公理化(axiomatization),68,74,76

公理(axioms),25,26,28,73

公理的独立性(independence of),76

公理的逻辑讨论(logistic discussion of the),76

巴加门(backgammon),52,58,79,124,125,164

讨价还价(bargaining),338,501,512,557,558,572,616

物物交换(barter exchange),7

行为(behavior),34

预期行为(expected),146

行为标准(standards of),参见行为标准(standards of behavior)

最优玩法(best way of playing),100

出价(bid),557

叫牌(bidding)

交替叫牌(alternate),211

双边垄断(bilateral monopoly),1,6,35,504,508,543,556

双线性型(bilinear form),154,156,157,166,233

诈叫,虚张声势(bluffing),54,164,168,186,188,204,205,206,208,218,541

诈叫的精细结构(fine structure of),209

布尔代数(boolean algebra),62

界(bound),59,60

有界的(bounded),384

界(bounds)

下界(lower),100

上界(upper),100

桥牌(bridge),49,52,53,58,59,79,86,224

复式桥牌(buplicate),113
桥牌锦标赛(tournament),113
买者(buyer),14,556,557,565,569,572,574,581,583,585,609,610,613

微积分(calculus),3,5,6
变分法(calculus of variations),11,95
取消(calling off),179,180,541
卡特尔(cartels),15,47
完全性(categoricity),76
重心(center of gravity),21,131,303
机会(chance),39,52,87
特征函数(characteristic function),238ff.,240,245,509,510,511,527,529,530,533,535,557,574,584,605,610
扩展特征函数(extended),528,529,532,533
有给定特征函数的博弈(game with a given),243,530,532
特征函数解释(interpretation),538
新理论中的特征函数(in the new theory),348
特征函数的正规化形式(normalized form of the),325
缩减特征函数(reduced),248,325,543,544,545
受约束特征函数(restricted),528,529,531,532,533
策略等价特征函数(strategically equivalent),536
特征函数上的向量运算(vector operations on),253
零简化特征函数(zero reduced),545
特征集函数(characteristic set function),241
国际象棋(chess),49,52,58,59,113,124,125,164

好棋(good),125
首要玩家(chief player),参见玩家(player)
选择(choice),49,51,59,69,222,508
实际(actual)1,75
选择的模式(pattern of),75
裁判的选择(umpire's),80,81,82,183
选择,选择公理(choice,axiom of),269
迂回(circularity),40,42,56
闭集(closed set),384
联盟(coalition),15,35,47,221,222,224,225,229,234,237,240,260,276,289,418,420,507,509,510,531,533,539,566,572,573,605
绝对联盟(absolute),231,238
肯定失败的联盟(certainly defeated)440
肯定胜利的联盟(certainly winning),440
关键联盟(decisive),420
失败联盟(defeated),296
最终联盟(final),315,317
第一联盟(first),306,307,315,316,320
联盟的相互影响(interplay of),291
失败联盟(losing),420,421,423
最小胜利联盟(minimal winning),429,430,436,438,445
可获利的最小胜利联盟(profitable minimal winning),442
不可获利的联盟(unprofitable),437
加权多数联盟(weighted majority),434
胜利联盟(winning),296,297,333,420,421,423,436,445,470

结盟竞争(coalitions,competition for),329
不同力量的联盟(of different strengths),227
封闭系(closed systems),400
一个矩阵的列(column of a matrix),93,141
组合数学(combinatorics),45
商品(commodity),10,13,560,565
信息交流(communications),86
不完备信息交流(imperfect),86
交换性(commutativity),91ff.,94,参见鞍点(saddle points)
相容的(compatible),267ff.
补偿(compensations),36,44,47,225,227,233,234,235,237,240,507,508,510,511,513,533,541,558
竞争(competition),1,13,15,249,509
补集(complement),62
互补(complementarity),18,27,251,437,628
取余运算(complementation),422
完备排序(complete ordering),参见完备排序(ordering,complete)
完全失败,彻底失败(completely defeated),296
合成(composition),340,359,360,454,548
合取(conjunction),66
成分(constituent),340,353,359,360,518
不可分解的成分(indecomposable),457,471
非本质成分(inessential),453,457
简单成分(simple),453,455,457
贡献(contribution),364,366

惯例(conventions),224
凸体(convex bodies),128
凸性(convexity),128ff.,275,547
合作(cooperation),221,402,474,481,508,517
完全合作(complete),483
对(couple),222,226,243,509
克鲁索(Crusoe),参见鲁滨孙(Robinson Crusoe),9,15,31,87,555
立方体 Q(cube Q),293,295
中心及其周边(center and its environs),313
立方体 Q 的中心(center of),316,317,321
立方体 Q 的角(corner),303,304,307,340,429
立方体 Q 的内部(interior of),302,303,304
立方体 Q 的主对角线(main diagonal of),302,304,305,312
中心点的邻域(neighborhood of the center),321
立方体 Q 内的特殊点(special points in),295ff.
立方体 Q 的三维部分(three-dimensional part of),314
曲线,未确定的曲线(curves,undetermined),418
抽牌(cutting the deck),185,186
循环占优("cyclical" dominations),39

可分解性(decomposability),342,357,360
可分解性分析(analysis of),343
分解(decomposition),242,292,340,359,360,452,537,548
分解的基本性质(elementary properties of),381
分解与解的关系(its relation to the solutions),384

分解分拆(decomposition Partition),参见分拆(partition),
分解(decomposition)
失败(defeated),296
肯定失败(certainly),440
完全失败(fully),436,参见玩家(players),联盟(coalitions)
防守(defensive),164,205
决定性(determinateness)
广义严格决定性(general strict),150,155,158ff.
狭义严格决定性(special strict),150,155
严格决定性(strict),106 ff.,111ff.,165,178,179
对角线(diagonals)
对角线隔离(separation of the),173
微分方程(differential equations),6,45
直接信号传递(direct signaling),54
歧视(discrimination),30,288,289,328,475,476,512,参见
有歧视的解(solution,discriminatory)
析取(disjunction),66
距离(distance),20
分配(distribution),37,87,226,261,263,350,364,437
域,定义域(domain),89,90,128,157
占优(domination),38,264,272,350,367,371,415,474,
520ff.,522,523,524,587
非循环占优的概念(acyclical concept of),602
非对称占优(asymmetrical),270
占优概念的扩展(extension of the concept of),587
非传递的占优概念(intransitive notion of),37

双盲棋(double-blind chess),58,72,79
对偶性(duality),104
哑玩家(dummy),299,301,340,358,397,398,400,454,
455,457,460,461,508,518,537,538
双头(duopoly),1,13,543,603
动态均衡(dynamic equilibria),45
动态(dynamics),44,45,189,290

E(e_0)中Γ的解[E(e_0),Solutions for Γ in],393ff.
埃卡泰牌戏(Ecarté),59
经济均衡(*economic equilibrium*),4
经济均衡波动(fluctuations),5
经济均衡模型(models),12,58
静态经济均衡(statics),8
数理经济学(economics,mathematical),154
内部经济(economies,internal),341
经济(economy)
有计划的共产主义经济(planned communistic),555
鲁滨孙经济(Robinson Crusoe),9
社会交换经济(social exchange),9ff.
有效性(effectivity),272,282,350,367,524
能(energy),21
企业家(entrepreneur),8
均匀分布(equidistributed),197
均衡(equilibrium),4,34,45,227,365
等价策略(equivalence strategic),参见策略等价(strategic

equivalence)
本质性(essentiality),249,272,351,452
例外的(exceptional),593
剩余(excess),364,367,417,418,454,455,548
剩余的分配(distribution of the),418
剩余的限制(limitation of the),365,366
剩余的下限(lower limit of),366
过大的剩余(too great),374,380,419
过小的剩余(too small),374,380
剩余的上限(upper limit of),369
交换经济(exchange economy),9,31
交换(exchange)
交换的不确定性(indeterminateness of),14
被排斥的玩家(excluded player),参见被排斥的玩家(player,excluded)
期望(expectation),12,28,83,539
数学期望(mathematical),10,28,29,32,33,83,87,117,118,126,149,156,157
道德期望(moral),28,83
期望值(values),183
剥夺(exploitation),30,329,375
扩展型(extensive form),112,119

$F(e_0)$中Γ的解[$F(e_0)$,solutions for Γ in],384ff.
公平(fairness),166,167,225,255,258,259,470
虚玩家(fictitious player),参见玩家(player)

发现其他玩家（"finding out" the other player）,148
发现对手（"finds out" his adversary）,106,110,148
第一元素（first element）,38,271
固定支付（fixed payments）,246,281,298,534
不动点定理（Fixed Point Theorem）,154
平性（flatness）,276,547
被发现（found out）,148
参照系（frame of reference）,129
完全独立的（fully detached）,参见完全独立的分配（imputation, detached fully）
谓词，函数（function）,88,128
算术函数（arithmetical）,89
特征函数（characteristic）,238ff.
函数的连续性（continuity of）,493
测度函数（measure）,252
数值函数（numerical）,89
数集（numerical set）,240,243,530,532
复合函数（of functions）,157
复数集（set）,89
泛函（functional）,157
谓词演算（functional calculus）,88,154
函数运算（functional operations）,88,91
基本三角形（fundamental triangle）,284,405ff.,552,553,569,570,587
区域（area）,579,580
基本三角形内的曲线（curves in）,412,570,580

不被占优的区域(undominated area),409

获益(gain),33,128,145,539,556,559,629
赌博(gambling),27,28,87,630,631
博弈和社会组织(game and social organizations),43
非对称博弈(asymmetric),334
辅助博弈(auxiliary),101ff.
博弈的公理化定义(axiomatic definition of a),73
博弈的机会成分(chance component of the),80
博弈的分类(classification of),46
博弈的完备概念(complete concept of),55
完备的博弈规则体系(complete system of rules of),83
合成博弈(composition),339ff.
常数和博弈(constant-sum),346ff.,347,350,351,504,505,535,536,537,585
可分解博弈(decomposable),454,471,518
可分解博弈的解(decomposable,solution of),358,381
分解(decomposition),339ff.
直接多数(direct majority),431,433
博弈的要素(elements of the),49
本质博弈(essential),231,232,245,250,331,534,545
本质三人博弈(essential three-person),220ff.,260ff.,471,473
日常博弈概念(everyday concept of),32
博弈的扩展型(extensive form of the),85,105,186,234
极端博弈(extreme),534,535

虚拟博弈(fictitious),240
博弈描述的最终简化(final simplification of the description of a),79,81
一般博弈(general),504ff.,505,538
博弈的一般描述(general description of),57
博弈的一般正式描述(general formal description of),46—84
一般 n 人博弈(general n-person),48,85,112,530,606
理论在一般 n 人博弈上的应用(general n-person, application of theory),542ff.
博弈的嵌入(imbedding of a),398
不可分解的博弈(indecomposable),354
非本质博弈(inessential),231,232,245,249,251,471
博弈的"膨胀"("inflation"of a),398
不变博弈(invariant),257
博弈的核(kernel of),457,459
博弈的长度(length of the),75
博弈的主要简单解(main simple solution of the),444
大博弈(majorant),100,102,103,119,149
多数博弈和主要解(majority and the main solutions),431
博弈的最小长度(minimum length of),123
小博弈(minorant),100,101,119,149
博弈的非孤立特征(non-isolated character of a),366
非严格决定的博弈(non-strictly determined),110
非零和博弈(non-zero-sum),47,见一般博弈(game,general)
博弈的正常区域(normal zone of the),519
博弈的正规型(normalized form),85,100,105,119,183,

234,239,322,325,452,473
机会博弈(of chance),87,185
一人博弈(one-person),85,548
描述一个博弈的分拆(partitions which describe a),67
完备信息(perfect information),112ff.
博弈计划(plan of the),98
博弈的一(多)局(盘)(plays of),49
简化博弈(reduced),248,259,473,543ff.
博弈规则(rules of the),32,49,59,80,113,147,224,
226,227,334,426,472
博弈的集合论描述(set-theoretical description of a),60,67
简单博弈(simple),参见简单博弈(simple game)
博弈的简单化概念(simplified concept of a),48
扩展型中的策略(strategies in the extensive form),111
严格决定的博弈(strictly determined),98ff.,106,124,
150,165,172,174,516
广义严格决定的博弈(strictly determined,generally),150
狭义严格决定的博弈(strictly determined,specially),150
博弈中的争斗(struggle in),125
博弈的叠加(superposition of),254,255
博弈中的惊奇(surprise in),125
对称博弈(symmetric),165,167,192,195,334,362
对称五人博弈(symmetric five-person),332,334
博弈的总体对称性(symmetry,total of),259
三人博弈(three-person),35,220ff.,282ff.,403ff.,457,550
三人简单多数博弈(three-person,simple majority of),222ff.

总体对称博弈(totally symmetric),257
总体不对称博弈(totally unsymmetric),257
惟一博弈(unique),331
空博弈(vacuous),116,546
博弈的值(value of the),102,103,170,516
单调加权多数博弈(weighted majority,homogeneous),444
博弈的零和扩展(zero-sum extension of),529
四人零和博弈(zero-sum four-person),291ff.
n 人零和博弈(zero-sum *n*-person),48,85,238ff.
三人零和博弈(zero-sum three-person),220 ff. ,260ff.
本质三人零和博弈的解(zero-sum three-person, solution of essential),282ff.
二人零和博弈(zero-sum, two-person),48,85ff.,116,169ff. ,176
几何(geometry),20,74,76
线性几何(linear),428
七点平面几何(plane,7-point),469
射影几何(projective),469
好的策略[good way(strategy)],103
好的玩法(good way to play),108,159
物品(goods)
互补物品(goods,complementary),437,628
可分物品(divisible),560,573
群(group),22,76,255ff.
交错群(alternating),258
不变群(invariance),257

分配群(of permutations),256
集合可递群(set-transitive),258
对称群(symmetric),256
群论(theory),256,258,295
完全对称群(totally symmetric),257
完全不对称群(totally unsymmetric),257
特权玩家组[group (of players),privileged],320

半空间(half-space),130,137,139
一手牌(hand),53,186,187,190,197,613
离散的若干手牌(hands,discrete),208
热(heat),3,17,21
遗传的(hereditary),454
遗传性(heredity),396,400
启发式的(heuristic),7,25,33,120,238,263,291,296,298,301,302,307,316,318,322,333,499,509,511,587
试探性论述(heuristic argument),147,181,182,227
讲价钱(higgling),557,558
齐性(homogeneity),433,464
超平面(hyperplane),130,137,139
支撑超平面(supporting),134ff.

恒等(identity),255,617
嵌入(imbedding),398,399,400,455,587
分配(imputation),34,37,39,240,251,263,264,350,376,437,517,520,527,566,577,587,606,610

分配的合成(composition of),359
分配的分解(decomposition of),359
独立的分配(detached),369,370,375ff.,413
独立的扩展分配(detached extended),370,375
完全独立的扩展分配(detached extended,fully),370,372
完全独立的分配(detached,fully),369,413
分配的经济概念(economic concept of),435
扩展的分配(extended),364ff.,367,368,369,372
单一分配(single),34,36,37,39,40
惟一分配(unique),608
扩展分配集(imputations,extended,sets of),368
有限分配集(finite set of),465,499
无穷分配集(infinite set of),288,499
分配集之间的统购(isomorphism between),282
分配集(set of),34,44,608
分配的系(system of),36,277,464
不可比的(incomparable),590,630
不可分解性(indecomposability),357,630,631,632
无差异曲线(indifference curves),9,16,19,20,27,29
玩家的无差异(indifference of player),300
间接证明(indirect proof),147
个人计划(individual planning),15
归纳法(induction),112,116
完全归纳法(complete),113,123
有限归纳法(finite),597
超限归纳法(transfinite),598

非本质博弈(inessential games),44
非本质性(inessentiality),249,272,351,357,454
信息(information),47,51,54,55,56,58,67,71,109,112,183
荒谬信息(absurd),67
实际信息(actual),67,79
机会和不完备信息(chance),182
完全信息(complete),30,541,582
不完备信息(imperfect),30,182
不完全信息(incomplete),30,86
信息的模式(pattern of),67,69
完备信息(perfect),51,123,124,164,233
完备信息情况的口头讨论(perfect,verbal discussion),126
玩家的实际信息(player's actual),75
玩家的信息模式(player's pattern of),75
信息集合(sets of),77
裁判的实际信息(umpire's actual),75
裁判的信息模式(umpire's pattern of),75,77
裁判的信息状态(umpire's state of),115
主动权(initiative),189,190
内部三角形(inner triangle),409,413,553
相互影响(interaction),341,366,400,483
国际贸易(international trade),7,341
区间(interval),线性区间(linear),131
非可递性(intransitivity),39,52
逆向信号(inverted signaling),54
非理性的(irrational),128,523

同构对应(isomorphic correspondence),281
同构(isomorphism),149,350,504
同构证明(isomorphism proof),281

应得权益(just dues),360,361

核(kernel),457
扼杀变量(killing the variable),91
克里斯皮尔棋("Kriegsspiel"),58

自由放任(laisser faire),225
洛桑学派的理论("Lausanne" theory),15
线性插值(linear interpolation),157
线性变换(linear transformation),22,23
直线性(linearity),128ff.
利普希茨条件(lipschitz condition),493
逻辑(logic),62,66,74,274
数理逻辑(logistic),66
  数理逻辑学解释(logistic interpretation),66
失败(losing),421,426
损失(loss),33,128,145,163,167,168,205,539,555,559,629

主要条件(main condition),272,274,279
主简单解(main simple solution),参见主简单解(solution, main simple)
主定理(main theorem),153

多数(majorities),加权多数(weighted),432
多数(majority),多数原则(principle of),431
多数博弈(majority game)
齐次多数博弈(homogeneous),443
齐次加权多数博弈(homogeneous weighted),444,463,469
加权多数博弈(weighted),433,464
多数原则(majority principle)
齐次加权多数原则(homogeneous weighted),467,469
行或列的优化(majorization of rows or columns),174,180
映射(mapping),22,618ff.
边际对(marginal pairs),560,562,563,564,571,581
边际效用学派(marginal utility school),7
市场(market),47,504,556,557,560,563,581,605
一般市场(general),583
三人市场(three-person),564
二人市场(two-person),555
质量(mass),20,21
硬币配对(matching pennies),111,143,144,164,156,169,176,178,185
硬币配对的推广形式(generalized forms),175ff.
数学方法(mathematical method)
数学方法的困难(difficulties of),2
经济学中的数学方法(in economics),1—8
数学物理学(mathematical physics),303
矩阵(matrix)
任意矩阵(arbitrary),153

矩阵的对角线(diagonal of),173,174
矩阵元素(elements),93,138,141
负转置矩阵(negative transposed),141,142
矩阵的(rectangular),93,138,140,141
矩阵的方案,矩阵的对角线(scheme,diagonal of the),173
斜对称矩阵(skew symmetric),142,143,167
矩阵运算(max operations),89ff.
最大值(maximum),88,89,591,593,594
绝对最大值(absolute),591,593
最大集体利益(collective benefit),513,514,541,613
最大值问题(problem),10,11,13,42,86,87,220,504,517,555
相对最大值(relative),592
最大满足(satisfaction),10
可测性(measurability),16,343
测度(measure)
可加测度(additive),343
测度的数学理论(mathematical theory of),252,343
测度(measurement),测度原理(principles of),16,20
力学(mechanics),4
方法(method),数学方法(mathematical),322
方法(method),饱和方法(saturation),446
最小值运算(min operations),89ff.
最小一最大值问题(min-max problem),154
W 的最小元素(minimal elements of W),430,448
最小值(minimum),88,89

错误(mistake),162,164,205

洗牌(mixing the deck),185

模型(models)

公理化模型(axiomatic),74

经济模型(economic),12,58

数学模型(mathematical),21ff.,32,43,74

货币(money),8,10

垄断者(monopolist),474

垄断(monopoly),13,474,543,584,586,602,603

买方垄断(monopsony),584,586,602,603

单调变换(monotone transformations),23

动机(motivation),43

动作(move)

机会动作(chance),50,69,75,80,83,112,118,122,124,126,183,185,190,517,604

动作的消除(removing of),183

哑动作(dummy),127

不可能动作(impossible),72

一个博弈中的动作(in a game),49,55,58,59,72,98,109,111

第一类动作(of the first kind),50

第二类动作(of the second kind),50

个人动作(personal),50,55,70,75,112,122,126,183,185,190,223,508,510

否定(negation),66

谈判(negotiations),263,534,541
新理论(New Theory)
新理论中的特征函数(characteristic function in the),348
新理论中的可分解性(decomposability in the),351
新理论中的占优(dominations in the),350
新理论中的三人本质博弈(essential three-person game in the),403ff.
新理论中的本质博弈(essentiality in the),351
新理论中的分配(imputations in the),350
新理论中的非本质博弈(unessentiality in the),351
新理论中的解(solutions in the),350
正常带(normal zone),396,399,401,417
数字效用(numerical utilities)
数字效用的公理化描述(axiomatic treatment of),24,参见数字效用(utility,numerical)
数字权重(numerical weight),432

进攻(offensive),164,205
寡头(oligopoly),1,13,47,504
利益对立(opposition of interest),11,220,484
最优(optimality)
永久最优(permanent),162,205,参见策略(strategy)
最优状态(optimum),38
最优行为(optimum behavior),34
社会秩序(order of society),41,43,参见组织(organization),行为标准(standard of behavior)

排序(ordering),19,37,38,589
完备排序(complete),19,26,28,589,591,593,595,500,617
半排序(partial),590,591,600
良排序(well),595
山岳形态学(oreographical),95,97
组织(organization),224,328,366,401,419
社会和经济组织(social and economic),41,43,225,318,319,329,358,362,365,402,436,471
组织的社会复杂性(social,complexity of),466
原点[origin (point in space)],129
外源(outside source),363,364,366,375,419
争叫(overbid),186,参见扑克(poker)
利益的一致(parallelism of interests),11,220,221
半排序(partial ordering),590,参见排序(ordering)
参与者(participants),31,33
分拆(partition),60,63,64,66,67,69,84,114ff.
分解(decomposition),353,354,356,357,457,471
鞍(pass),95,97
不叫,放弃(passing),参见扑克(poker)
"佩兴斯"(patience),86
反证法(per absurdum proof),147,148
置换(permutation),255,262,294,309,319
循环置换(cyclic),230,470
扰动(perturbations),303,341
物理科学(physical sciences),21,23,32,43
物理学(physics),2,3,4,45,76,148,401

计划(planning),86
矩形高原(plateau,rectangular),97
貌似合理性分析(plausibility considerations),7
玩一盘(局或次)某种博弈(play),49,59,71
实际博弈(actual),82
博弈进程(course of the),68,70,84
博弈的特性(individual identity of the),71
博弈的结果(outcome of the),82
一盘博弈中的选择序列(sequence of choices),49
一盘博弈的值(value of a),104,105,124,127,150,163,165,178,238
玩家(player)
首要玩家(chief),473,474ff.,481,483,500,502
被隔离的首要玩家(chief,segregated),500,502
合成(composite),231,232,239,516
失败玩家(defeated),418
遭歧视的玩家(discriminated),476,502
被排斥的玩家(excluded),289,301,512
虚玩家(fictitious),505,506,507,508,509,511,513,514,516,518,537
被发现的玩家(found out),145
无差异玩家(indifferent),299
孤立的玩家(isolated),375
特权玩家(privileged),473
被隔离的玩家(segregated),476,502,503
自足玩家(self-contained),353,357

分裂玩家(splitting the),86
无特权玩家(unprivileged),320
胜利玩家(victorious),426
玩家(players)
交换玩家(interchanging the),104,109,122,165,255
玩家置换(permutation of the),294,463
特权玩家组(privileged group of),320,454
可去除的玩家集合(removable sets of),533
玩家的策略(strategies of the),49,参见策略(strategy)
恰当的玩法(playing appropriately),102,103,107,159,167
某种博弈的全部博弈的集合(plays,set of all),75
扑克(poker),52,54,56,58,59,164,168,186,187ff.,557,613
叫牌(bids),209
Draw,187
扑克的一般形式(general forms of),207
好的策略(good strategy),196
解的解释(interpretation of the solutions),218
全部解的数学描述(mathematical description of all solutions),216ff.
盖叫(overbidding),188,190
放弃(passing),188,190,191,199
跟了(seeing),188,190,191,199,218
解(solution),199,202,204
策略(strategies),191
Stud,187
位置(position),21

正卦限(positive octant),133
正象限(positive quadrant),133
公设(postulates),27,参见公理(axioms)
偏好(preferences),15,17,18,23,522,590,607,630
　偏好的完备性(completeness of),29,530,631
　偏好的可递性(transitivity of),27,参见效用(utility)
预备(preliminarity),51,52,77,78,112,117,124
起始条件(preliminary condition),273,471
溢价(premiums),582
价格(price),556,559,562,563,564,571,572,582,595
　平均价格(average),564,582
　惟一价格(unique)564
特权(privilege),464
概率(probabilities)
　概率的选择(choice of),145
概率(probability),11,17,19,39,81,87,128,146,197
　几何概率(geometrical),197
　数字概率(numerical),14,19,27,28,69,75,80,113,145,147,156,183,604
　失败的概率(of losing),144
　胜利的概率(of winning),144
生产(production),5,13,504
生产力(productivity),33,34,504,540
利润(profit),33,47,572
真子集(proper subset),61
真超集(proper superset),61

心理现象(psychological phenomena)
　心理现象的数学描述(mathematical treatment),28,77,169

量子力学(quantum mechanics),3,33,148,401

随机性(randomness),146
理性的(rational),9,517
　理性行为(behavior),8—15,31,33,127,150,160,224,225
　理性博弈(playing),54
理性(rationality),99,128
折扣(rebates),582
重新签约(recontracting),557,558
简化型(reduced form),248,544
简化(reduction),322,325
相对论(Relativity Theory),23,148
可去除集(removable set),参见可去除集(set,removable)
环(ring),243,530,531
风险(risk),163
鲁滨孙·克鲁索(Robinson Crusoe),参见克鲁索(Crusoe)
掷骰子(rolling dice),166
轮盘赌(roulette),87
一个矩阵的行(row of a matrix),14,93,参见矩阵(matrix)

鞍(saddle),95,97
　鞍点(points),93,95,110,153
　鞍点值(value),88,95,107

圣彼得堡问题(St. Petersburg Problem),28,83
满足(satisfaction)
最大满足(maximum),8,10,15
满足(satisfactoriness),267ff.,446ff.
最大满足(maximal),269
饱和(saturation),266,267ff.,446ff.,448,591
数量乘法(scalar multiplication),129,253,254
跟了(seeing),参见扑克(poker)
隔离(segregation),290
卖者(seller),555,557,565,569,572,574,581,583,585,609,610
被隔离的数(separated numbers),173
集合(set),60,61,114ff.
肯定必要集(certainly necessary),273,274,277,308,309,323,405,430,471,547
肯定不必要集(certainly unnecessary),273,274,276,308,309,323,405,430,471,547
完备排序集(completely ordered),19
凸集(convex),131,133
凸生成集(convex spanned),131
有效集(effective),38,264
集合的元素(elements of),61
空集(empty),61,241,380
有限集(finite),61
平集(flat),275,276,423,424
不减数集(minuend),62

一元集(one-element),61
半排序集(partially ordered),19
可去除集(removable),533,534,535
一元集(solo),参见单人集(solo set)
裂集(splitting),353,457,518
最小裂集(splitting minimal),355,356
全部裂集的系(splitting,system,of all),354
减数集(subtrahend),62
集论(theory),45,60ff.
集合(sets)
集合的差(difference of),62
不相交集(disjunct),62
集合的交(intersection of),62
集合的逻辑学解释(logistic interpretation),66
分配集(of imputations),分配集的合成(composition of),359
分配集的分解(of imputations,decomposition of),359
两两不相交集(pairwise disjunct),62
集合的交(积)(product of),62,66
自足集(self-contained),354
集合的并(和)(sum of),62,66
集合的系或聚合(systems or aggregates of),61
信号传递(signaling),51,53
直接信号传递(direct),54
反向信号传递(inverted),54
简单博弈(simple game),420ff.,454,605
给简单博弈添加哑玩家(adding dummies to),462

简单博弈和分解(and decomposition),452
简单博弈的特征函数(characteristic function),427
简单博弈的特征化描述(characterization of the),423
简单博弈中的补偿(complementation in),422ff.
全部简单博弈的枚举(enumeration of all),445ff.
$n \geqq 4$ 的简单博弈(for $n \geqq 4$),461
$n \geqq 6$ 的简单博弈(for $n \geqq 6$),463
n 较小的简单博弈(for small n),457
不可分解的简单博弈(indecomposable),457
简单博弈中的一元集(one-element sets in the),425ff.
六个主要反例(six main counter-examples),464
简单博弈的解(solution of),430
策略等价的简单博弈(strategic equivalence),428
简单博弈的系 W,L(systems W,L,of),426ff.
有哑玩家的简单博弈(with dummies),461
博弈的简单性(simplicity),433,452,454
简单博弈的基本性质(elementary properties of),428
简单博弈的严格定义(exact definition of),428
斜对称性(skew-symmetry),166
社会交换经济(social exchange economy),9ff.
社会秩序(social order),365
社会组织(social organizations),参见组织(organizations)
社会产品(social product),46
社会结构(social structure),484
社会(society),42,320,341,523,540
单人纸牌戏(solitaire),86

单人集(solo set),244,530,531

解(solution),102,264,350,367,368,417,478,526,527,587,588

解中的区域(二维部分)[areas(two-dimensional parts) in the],418

非对称解(asymmetric),315,362

解的合成(composition of),361

解的概念(concept of a),36

解的构造中的分配概念(concept of imputation in forming),435

解中的曲线(一维部分)[curves(one-dimensional parts) in the],417

可分解的解(decomposable),362

解的分解(decomposition),361

解的定义(definition),39,264

有歧视的解(discriminatory),301,307,318,320,329,442,511,512

三人本质零和博弈(essential zero-sum three-person game),282

解的存在性(existence of),42

解的概念扩展(extension of the concept of),587

解族(families of),329,603

有限解(finite),307,500

有限分配集解(finite sets of imputations),328

一个非循环关系的解(for an acyclic relation),597

一个完备排序的解(for a complete ordering),591

$E(e_0)$中Γ的解[for Γ in $E(e_0)$],393ff.
$F(e_0)$中Γ的解[for Γ in $F(e_0)$],384ff.
一个半排序的解(for a partial *ordering*),592
一个对称关系的解(for a symmetric relation),591
$n \geqq 3$的全部博弈的解(general games with $n \geqq 3$,of all),548
一般三人博弈的解(general three-person game),551
不可分解的解(indecomposable),362
有歧视的解[inobjective(discriminatory)],290
主简单解(main simple),444,464,467,469
解的多样性(multiplicity of),266,288
自然解(natural),465
解的新定义(new definition of),526
无歧视的解(non-discriminatory),290,475,511
无歧视的解[objective(non-discriminatory)],290
一元解(one-element),277,280
全部解的集合(set of all),44
超数字解(super-numerary),288
对称解(symmetric),315
惟一解(unique),594,600,601,603
不对称中心解(unsymmetrical central),319
可靠性(soundness),265
空间(space)
欧几里得空间(Euclidean),21,128,129
半空间(half),137
线性空间(linear),157
n维空间(n-dimensional linear),128

正向量(positive vector),254
特殊依赖形式(special form of dependence),56
分裂个性(splitting the personality),53
稳定性(stability),36,261,263,266,365
内稳定性(inner),42,43,265
行为标准(standard of behavior),31,40,41,42,44,265,266,271,289,351,355,401,418,472,478,501,512,513
有歧视的行为标准(discriminatory),290
(稳定的或公认的)行为标准的多样性[multiplicity(of stable,or accepted)],42,44,417
无歧视行为标准(non-discriminatory),290
静态(statics),44,45,147,189,290
统计学(statistics),10,12,14,144
“石头、剪子、布”(stone,paper,scissors),111,143,144,164,185
停止规则(stop rule),59,60
策略等价(strategic equivalence),245,247,248,272,281,346,348,373,426,429,472,505,535,543
策略同构(isomorphism of),504,505
策略(strategies),44,50,79,80,84,101,117,119
策略组合(combination of),159
策略(strategy)
作为动作的策略(as move),84
渐近策略(asymptotic),210
整体最优策略(best),124,517
策略选择(choice of),82,145,147

策略的概念(concept of a),79
被发现的策略(found out),151,153,158,160,168
好的策略,良策(good),108,146,160ff.,161,162,164,170,172,178,179,183,196,205,206
高阶策略(higher order of a),84
混合策略(mixed),143ff.,146,148,149,155,157,161,168,174,183,192,232,539,604
最优策略(optimal),127,517
永久最优策略(permanently optimal),163,164,165
纯策略(pure),146,148,155,157,161,168,181,182
统计策略(statistical),144,146
严格策略(strict),146
策略的连续结构(structure,continuous),197
策略的精细结构(structure,fine),197
策略的颗粒结构(structure,granular),197
严格决定性(strict determinateness),参见决定性(determinaterness)
争斗(struggle),249
子分拆(subpartition),63,64,69
子集(subset),61
替代率(substitution rate),465
占优(superiority),占优的可递性概念(intransitive notion of),37
叠加(superposition),64
超集(superset),61
对称性(symmetry),104,109,165,166,190,224,255,256,

258,267,315,446ff.,500,591,参见群(group)

套套逻辑的(tautological),8,40
温度(temperature),17,21
理论(theory),扩展的理论(extended)
理论的结构(structure of the),368
新理论(Theory,New),526,528,参见新理论(New Theory)
热力学(thermodynamics),23
检温学(thermometry),22
平局(tie),125,315
拓扑(topology),154,384
总值(total value),251
转移(transfer),30,364,365,401,402
效用的可转移性(transferability of utility),8,608
超限归纳法(transfinite induction),269
变换(transformation),22,23
可递性(transitivity),38,39,61,589,590
树图(trees),66,67
贡金(tribute),30,402
拔河(tug-of-war),100

裁判(umpire),69,72,84
不确定性(uncertainty),35
谅解(understandings),223,224,237
效用(utilities)
效用的可比性(comparability of),29

效用的完备排序(complete ordering of the),19,26,29,604,617ff.
效用无差异(differences of),18,631
效用的域(domain of),23,607
不可加的效用(nonadditive),250
非数字效用(non-numerical),16,606,607
数字效用(numerical),17ff.,157,605,606,617ff.
数字效用,可替代性(numerical,substitutability),604
半排序效用(partially ordered),19,590
效用的系(system of),26
效用的可转移性(transferability),8,604,606,608,620
可变效用(variable),560
效用(utility),8,15,23,33,47,83,156,556,563,565,569,572,573,583,585,603,608,616,617ff.
效用的公理化描述(axiomatic treatment),26ff.,617ff.
递减效用(decreasing),561,576
离散效用(discrete),613
期望效用(expected),30
效用概念的推广(generalization of the concept of),603ff.
效用的不可分单位(indivisible units),609,613,614
边际效用(marginal),29,30,31
效用刻度(scale),效用刻度的精细度(fineness of),616
总效用(total),34,35

值(value)
经济价值(economic),252,467,556,565

函数值(of a function),88
一局博弈的值(of a play),参见博弈(play)
变量(variables),12,13,88
变量的综合(aggregate of),239
"陌生的"变量("alien"),11
部分变量集(partial sets of),12ff.
向量(vector),129,140
向量相加(addition),130,253,254
分量(components),129,140
坐标(coordinate),129,157
向量之间的距离(distance),134
向量的长度(length),134
向量运算(operations),129
拟分量(quasi-components),404
向量空间(spaces),254
零向量(zero),129
实际起作用的存在(virtual existence),36,45,338,484

需要(wants),10
波动力学(wave mechanics),148
权重(weights),433,434,463
齐次权重(homogeneous),435,444
谁发现谁(who finds out whom),110
胜利(winning),296,421,426
肯定胜利(certainly),440
完全胜利(fully),436

取回(withdrawal),364,366
特征函数的零简化型(zero-reduced form of characteristic function),545
零和条件(zero-sum condition),345
Γ的零和扩展(zero-sum extension of Γ),505,506,527,531,538
零和约束(zero-sum restriction),84,504

道可道非常道

译 者 后 记

一、关于博弈论

经济学在20世纪经历了两场革命：一场是20世纪上半叶的“边际革命”；另一场则是最近30年渐成态势的“博弈论革命”。著名经济学家保罗·萨缪尔森曾经说过：“要想在现代社会做一个有文化的人，必须对博弈论有一个大致的了解。”

博弈论是使用严谨的数学模型，研究冲突对抗条件下最优决策问题的理论。博弈论认为：人是理性的，在策略选择时每个人都会追求约束条件下的利益最大化；同时，人们的行为又是互相影响的。当你考虑怎样击打一块石头时，不必考虑那块石头对你行动的反应；而当你下棋时，就不得不考虑你的对手方会对你的选择做出什么反应。社会经济活动就如下棋一样。也就是说，在任何交易中，你做选择时必须考虑到其他人的选择；而其他人做选择时也要考虑你的选择。你的行为结果不仅取决于你的策略选择，也取决于他人的策略选择，这样，你与你的对手方就

构成了一个博弈。只要涉及到人群的互动就有博弈，博弈论研究的就是在互动条件下人们的最优策略选择问题。

博弈论最重要的贡献是它促进了人类思维的发展，增进了人类的相互了解与合作，由此它成了理解人类经济行为的方法论基础。博弈论主要是一种研究方法，这种方法已经在许多学科当中得到了应用，这些学科至少包括经济学、社会学、政治学、伦理学、生物学和军事科学等。

博弈论主要是由约翰·冯·诺伊曼（John von Neumann，1903—1957 年）创立的。冯·诺伊曼是一位出生于匈牙利的美国数学家。尽管在 20 世纪初，塞梅鲁（Zermelo）和鲍罗（Borel）就已经开始研究博弈的数学表达问题，但一直到 1939 年，冯·诺伊曼遇到经济学家奥斯卡·摩根斯顿（Oskar Morgenstern，1902—1977 年）之后，才使博弈论进入经济学的广阔领域。

1944 年，冯·诺伊曼与奥斯卡·摩根斯顿合著的巨作《博弈论与经济行为》出版，标志着博弈理论正式形成。冯·诺伊曼和摩根斯顿在《博弈论与经济行为》一书中所建立的合作型博弈模型，奠定了这门学科的基础。合作型博弈研究在 20 世纪 50 年代达到了巅峰。然而，由于合作型博弈过于抽象，其应用范围受到了限制。正是在这个时候，非合作型博弈模型出现了，它标志着人们对博弈理论的研究进入了一个新阶段。

1950 年和 1951 年，数学家纳什（John Nash）的两篇开创性论文《n 人博弈的均衡点》和《非合作博弈》改变了人们对竞争和市场的看法，证明了非合作型博弈及其

均衡解的存在，这就是著名的“纳什均衡”。“纳什均衡”揭示了博弈均衡与经济均衡之间的内在联系，奠定了现代非合作型博弈理论的基石，后来的博弈论研究基本上都是沿着这条主线展开的。“纳什均衡”是一种策略组合，即给定对手方一定的策略之后，每个参与者都会选择自己的最优策略。也就是说，“纳什均衡”是一种僵局，只要博弈参与者的策略一经决定，任何人都不会有激励偏离这一均衡。经济学中的完全竞争均衡，就是“纳什均衡”，因为买卖双方都是按照既定的价格进行交易量的选择，结果导致了零利润。

后来，塞尔顿（Reinhard Selten）发展了“纳什均衡”概念，定义了完全信息动态博弈的“子博弈完备纳什均衡”（1965 年），并进一步描述了不完全信息动态博弈的“完备贝叶斯—纳什均衡”（1975 年）。哈尔萨尼（John C. Harsanyi）则发展了不完全信息静态博弈的“贝叶斯—纳什均衡”（1967—1968 年）。塞尔顿和哈尔萨尼共同将“纳什均衡”动态化，并增加了不完全信息条件。1994 年 10 月 11 日，瑞典皇家科学院宣布，由于纳什博士对非合作博弈理论中的均衡问题进行了开创性分析，他与塞尔顿教授和哈尔萨尼教授分享了该年度的诺贝尔经济学奖。

除了上述三位博弈论专家共同获得 1994 年诺贝尔经济学奖以外，1985 年诺贝尔经济学奖的获得者布坎南（公共选择学派）和 1995 年诺贝尔经济学奖的获得者卢卡斯（理性预期学派）的理论与博弈论都有着十分密切的联系。现在博弈论已经渗透到包括经济学在内的众多研究领域，正在深刻地改变着人类的思维方式和人们的交易行为。

二、关于"囚徒困境"

"囚徒困境"是博弈论的一个经典案例，确切地说，是一个非合作型博弈的典型案例。

1950年，美国数学家塔克（Albert W. Tucker）在斯坦福大学担任客座教授，为了更通俗地向学生讲解博弈理论，他用两个囚犯的故事，对博弈问题进行了形象化的处理和表述，结果取得了巨大成功。借助于这个故事，博弈理论为更多的人们所理解。

塔克的故事是从一桩凶杀偷盗案开始的。一位富翁在家中被杀，财物被盗。警方在此案的侦破过程中，抓到犯罪嫌疑人斯卡尔菲丝和那库尔斯，并从他们的住处搜出了被害人家中被盗的财物。但是，斯卡尔菲丝和那库尔斯都矢口否认曾经杀人，辩称只是在发现富翁被杀后，顺手牵羊偷了点东西而已。于是警方将斯卡尔菲丝与那库尔斯隔离开来，分别关在不同的房间进行审讯，检察官分别与他们单独谈话。检察官说："由于你们的偷盗罪已有确凿的证据，完全可以给你们判刑1年。但是，我可以和你做个交易：如果你单独坦白杀人的罪行，我只判你3个月的监禁，而你的同伙则要被判刑10年；如果你拒不坦白，而被同伙检举，那么你就将被判刑10年，而他只判3个月监禁；如果你们两人都坦白交代，那么，你们都将被判刑5年。"在这种情况下，斯卡尔菲丝和那库尔斯面对的是一个"坦白"还是"抵赖"的策略

选择。

非常明显，此时最好的策略选择是双方都选择“抵赖”（合作博弈），结果是大家都只被判刑1年。但是，由于斯卡尔菲丝和那库尔斯处于完全隔离状态，他们难以串供（无法合作），于是，“坦白”（非合作博弈）取代“抵赖”变成最优策略选择：因为一个人选择“坦白”可能仅被监禁3个月（另一个人可能选择“抵赖”）；选择“抵赖”则有可能坐牢10年（另一个人可能选择“坦白”）。也就是说，在非合作博弈的情况下，双方都会选择“坦白”作为自己的最优策略：如果对方选择了“抵赖”，自己就可以仅被判3个月的监禁；如果对方也选择了“坦白”，自己至多被判刑5年而不是10年。结果，斯卡尔菲丝和那库尔斯都选择了“坦白”策略和被判刑5年的结果，放弃了原本对双方都更为有利的“抵赖”策略和被判刑1年的结果。

这样一个在非合作博弈情况下，由于斯卡尔菲丝和那库尔斯都选择了“坦白”策略而被判刑5年的结局被称为“纳什均衡”，也叫非合作型均衡。

三、关于冯·诺伊曼

我希望通过这本书，通过我们的翻译工作，使中国认识或重新认识约翰·冯·诺伊曼。他实在不应该被我们遗忘，而偏偏又被我们遗忘得太久了。

其实，不仅中国，整个世界对冯·诺伊曼的忽视都太

久了。尽管全世界都将冯·诺伊曼称为计算机之父，尽管现代许多学科都能在自己的领域内发现冯·诺伊曼的杰出贡献，但他却没有像爱因斯坦和霍金那样广为人知。正如丹佛大学科技史教授瑞波斯·迪尔所说的："我们对冯·诺伊曼的了解，远不及他所贡献的一半。"

冯·诺伊曼是20世纪最伟大的数学家之一，他在遍历理论、拓扑群理论等方面进行了开创性研究，算子代数甚至被命名为冯·诺伊曼代数。物理学界也把冯·诺伊曼归入20世纪最杰出物理学家的行列，他在20世纪30年代撰写的《量子力学的数学基础》，成为原子物理学发展的里程碑。伦理学家们则认为冯·诺伊曼为他们提供了用来分析和解释社会伦理行为的最有用的工具。冯·诺伊曼还曾设计过一项用计算机预报天气的系统，成为今天气象数值预报的先驱。他还从计算机的角度研究人类思维，开创了人工智能研究新领域。更令人感到不可思议的是，他在半个世纪前就曾预言了电脑病毒的出现。

冯·诺伊曼是一位真正的博学者，一位真正的天才。他满怀激情地投身于那些可以使用抽象数学作为分析工具的所有领域，并且取得了众多研究成果，这些成果至今仍照耀着世界学术界和科技界的天空。从遍历定理的证明到控制天气的方法，从原子弹的聚爆装置到博弈论，从一种用于研究量子物理的数学理论到带有预先储存程序的计算机装配，到处都可以看到他的天才在闪光。在他发表的150篇论文中，60多篇研究的是理论数学，20多篇研究的是物理学，另外60多篇研究的是应用数学，包括统计

学和博弈论。

四、关于本书的翻译

当我是一个大学生时成为《读书》的读者；当我读到研究生时成为《读书》的作者，并因此认识《读书》的编辑贾宝兰女士。宝兰有着与《读书》一样温文的风格，她像《读书》一样成为我的朋友。

2002年深秋，宝兰把一本厚厚的英文书放在我的面前，希望我能翻译它。当时我工作非常忙，身心疲惫，无暇他顾，几次婉言谢绝。是宝兰的真诚和执着感动了我，最后，我接过了这本名为《博弈论与经济行为》的学术名著。

我知道这本书是由一位数学家与一位经济学家共同完成的。我是学经济学的，自知数学功力不够深厚，所以，签下翻译合同后，我想做的第一件事就是找一位学数学的人作为合作者。我想起的第一个人就是王文玉教授。王文玉教授是一个精通经济学的数学家，或者说是一个精通数学的经济学家。20年前，他从数学系毕业，此后一直在经济学院讲授宏观经济学和微观经济学，既有深厚的数学功底，又有良好的经济学修养，应该是翻译这本书的最好合作者。事实证明，我的选择是正确的。

我翻译过不少书，这本书是译得最苦、最累的一本。不是翻译本身的困难，而是这本书的翻译合同期（2002年深秋到2004年初春）正值人民币面临巨大升值压力的时

期。由于我在中国人民银行货币政策司汇率处工作，所以也是我工作任务最重、工作压力最大的时期。在那段时间里，我每天都在超负荷工作，每天晚上都是加班到深夜，几乎没有星期天和节假日。这本书的全部翻译工作都是在非连续地积累起来的深夜时间(晚上 10 点—12 点)里完成的。

我很喜欢音乐，但不喜欢那些昂贵、豪华的音响设备，多年来我一直用一个老式录音机和老式磁带听音乐。下班后，打开录音机听一段柴可夫斯基，是我一天中换换脑子、放松心情的最好消遣。一个我非常敬重的朋友，帮我翻录了一套十盒包括柴可夫斯基在内的欧洲古典音乐。每天深夜，当我拖着疲惫的身躯回到家中时，总要打开这个老式录音机，听一段柴可夫斯基。然而，这本书的翻译工作开始后，我很快进入了工作状态，走入了冯·诺伊曼的学术世界。

深夜，当我坐在书桌前扭亮台灯、打开书时，冯·诺伊曼的思想就会通过文字像柴可夫斯基的音乐一样响起，慢慢地流淌进我的心底。此时，我会忘掉白天的忙碌、疲劳、烦恼和无奈，而由衷地感到生活是如此美好，生命是如此美丽。

我愿用这本译著纪念那段艰难的日子。

王 宇

2004 年 4 月 8 日于北京康乐里

20 世纪经济学
经典译丛

下册

博弈论与经济行为

〔美〕冯·诺伊曼　摩根斯顿 著
王文玉 王宇 译

生活·讀書·新知 三联书店

20世纪经济学经典译丛

博弈论与经济行为 下册

John Von Neumann and Oskar Morgenstern

〔美〕冯·诺伊曼 摩根斯顿 著

王文玉 王宇 译

生活·讀書·新知 三联书店

20世纪经济学经典译丛

← 博弈论与经济行为 Ⅰ

Theory of Games and Economic Behavior

ISBN 7-108-02152-8

9 787108 021526 >

ISBN 7-108-02152-8 定价：50.00元(上、下册)

图书在版编目(CIP)数据

博弈论与经济行为/(美)冯·诺伊曼、摩根斯顿著;王文玉,王宇译.-北京:生活·读书·新知三联书店,2004.12
(2005.6 重印)
(20 世纪经济学经典译丛)
ISBN 7-108-02152-8

Ⅰ.博… Ⅱ.①摩… ②王… ③王… Ⅲ.对策论-应用-经济学 Ⅳ.F224.32

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 079489 号

策划编辑 贾宝兰
责任编辑 薛松奎
封扉设计 罗 洪
出版发行 生活·讀書·新知三联书店
(北京市东城区美术馆东街 22 号)
邮　　编 100010
经　　销 新华书店
排　　版 北京京鲁创业图文设计有限公司
印　　刷 北京京海印刷厂
版　　次 2004 年 12 月北京第 1 版
2005 年 6 月北京第 2 次印刷
开　　本 850 毫米×1168 毫米 1/32 总印张 33.375
字　　数 660 千字 图字 01-2000-0843
印　　数 05,001-10,000 册
定　　价 50.00 元(上、下册)